République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Centre Universitaire de Béchar

Département de Génie Civil et d'Architecture



Support du cours

Béton Armé I
TEC185

Fait par :

Mr BARAKA Abdelhak

Année universitaire 2005-2006

Sommaire

Chapitre III : Les composants du Béton Armé

Chapitre IV : Association Béton - Acier

Chapitre V : Les hypothèses de calcul

Chapitre VI : La traction simple

Chapitre VII : La compression simple

Chapitre VIII : La flexion simple

Chapitre IX : L'effort tranchant

Chapitre X : La flexion composée

Chapitre XI : La torsion

Présentation

S'appuyant sur la documentation riche et disponible dans le domaine, nous avons mis au point ce travail, présenté comme un support du cours du Béton armé I (TEC185). Ce dernier définit les différents constituants du béton armé ainsi que leurs façonnages et dispositions. Il illustre les notions de base de calculs de ce matériau sous contraintes généralisées (compression, traction, flexion simple…), tenant compte des règles de conceptions et de calculs aux états limites adoptées par le règlement Algérien le C.B.A93.

Enfin, avec les développements détaillés des méthodes de calculs du béton armé accompagnés de quelques applications; ce polycopié constitue une référence pédagogique orientée au niveau du centre universitaire de Béchar, dans l'objectif de faciliter toutes consultations ou enseignement du module concerné.

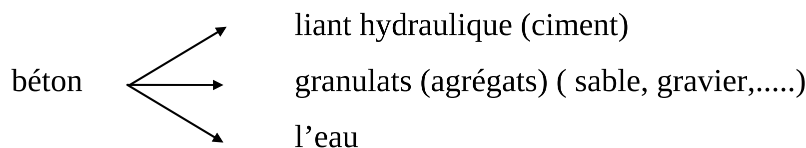
Chapitre I

Introduction en béton armé

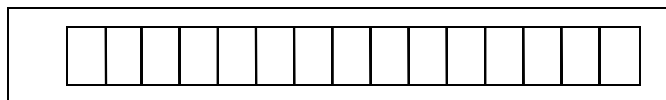
Chapitre I : Introduction en béton armé

I- Généralités :

Le B.A est un élément mélangé par plusieurs matériaux. Il est constitué par la réunion de deux matériaux que nous supposons simple; c'est le béton et l'acier, disposés d'une façon à utiliser d'une manière économique la résistance de chacun d'eu on appelle béton : le mélange dans des proportion convenable des éléments suivants :



On appelle béton armé le matériau obtenu en ajoutant au béton des barres en acier. Ces barres en acier sont généralement appelées **armatures**.



Armatures (le ferraillage c'est l'ensemble de toutes les armatures)

Dans l'association béton + acier, le béton résiste aux efforts de compression et l'acier résiste aux efforts de traction et éventuellement aux efforts de compression si le béton ne suffit pas pour prendre tous les efforts de compression qui existent.

Béton $\rightarrow$ Compression (Résistance à la compression = 20 MPa à 40MPa)

(Résistance à la traction = 2 MPa à 4MPa)

Acier $\rightarrow$ Traction ou compression (200 MPa à 500 MPa)

Une construction sera appelée en béton armé si les deux matériaux participent à la résistance de l'ensemble.

II- Avantages et inconvénients du béton armé :

1- Avantages :

a. L'intérêt économique : Le béton est le moins coûteux des matériaux résistant à la compression et susceptible d'être associé à d'autres éléments.

On dit que l'acier est actuellement le seul matériau utilisé dans la fabrication des armatures parce que sa résistance est moins chaire des matériaux pouvant être résistés à la traction.

b. La souplesse d'utilisation : le béton étant mis en place (dans des moules : coffrage) à l'état pâteux ; il est possible de réaliser des constructions aux formes les plus variées et les

armatures peuvent être facilement liées. Les assemblages entre différents éléments en béton se réalisent par simple contact.

Le béton armé se traite facilement à la pré-fabrication en usine.

c. Economie d'entretien : les constructions en béton armé ne nécessitent aucun entretien tandis que les constructions métalliques ont besoins d'être peintes régulièrement.

d. Résistance au feu : les constructions en béton armé se comportent beaucoup mieux en cas d'incendie que les constructions métallique ou en bois. Le béton, grâce à sa mauvaise conductibilité thermique retarde les effets de la chaleur sur les armatures, il est possible de remettre en service la construction après les réparations superficielles ce qui est impossible pour les constructions métalliques. Cette propriété a permit d'utiliser le béton armé dans certaines parties des fours.

e. Résistance aux efforts accidentels : le béton armé en raison de son poids important est moins sensible aux variations de surcharges que d'autres modes de constructions.

f. Durabilité : le béton armé résiste bien à l'action de l 'eau et de l'air la seule condition a observer et la protection des armatures.

2. Les inconvénients du béton armé :

a. Le poids : les ouvrages en B.A sont plus lourds que les autres modes de constructions.

b. L'exécution : pour exécuter un ouvrage en béton armé il faut :

- Préparation de coffrage qui demande beaucoup de temps et un travail de charpente important. Ce coffrage doit rester en place jusqu'à se que le béton atteint une résistance suffisante.
- le placement des armatures
- pendant et après les mises en place du béton, il faut prendre des précautions pour le protéger contre le gel et l'évaporation de l'eau.
- Le contrôle de la qualité du matériau perfectionné lors du gâchage.

c. Brutalité des accidents : les accidents qui surviennent d'un ouvrage en béton armé sont en général soudains ou brutaux, en général ces accidents sont dus à des erreurs de calculs ou de réalisations.

d. Difficulté de modification d'un ouvrage déjà réalisé : il est difficile de modifier un élément déjà réalisé.

Chapitre II

Sécurité Réglementation

Chapitre II : Sécurité Réglementation

I- Généralités :

La sécurité est définit comme l'absence de risque et dans le domaine de construction ; cela implique la stabilité et la durabilité et l'aptitude à l'emploi. La sécurité absolue n'existe pas; il faut accepté une probabilité non négligeable d'accident.

Le dimensionnement des ouvrages et la vérification de la sécurité ne peuvent pas se faire de manière empirique. Ils sont basés sur des règles de calculs bien précises.

II- Règlements classiques - coefficient de sécurité : (C.C.B.A)

Ces règlements utilisent la méthode des contraintes admissibles qui consiste à vérifier les contraintes calculs par la R.D.M en tout point d'une structure sous une contrainte admissible obtenue en divisant la contrainte de ruine du matériau par un coefficient de sécurité fixé à l'avance.

$$\sigma < \overline{\sigma} = \frac{\sigma_r}{k}$$

III- Théorie probabiliste de la sécurité :

Les ingénieurs ont défini la sécurité par un seuil de probabilité; un ouvrage sera acceptable si la probabilité de ruine reste inférieure à une probabilité fixée à l'avance. Cette valeur varie en fonction de la durée de vie de la construction, du risque et du coup. Cette méthode à multiple difficulté.

1-On ne peut pas définir la probabilité de ruine et son évolution dans le temps.

2- On ne peut pas recenser tous les facteurs aléatoires d'une incertitude.

IV- Théorie semi -probabiliste - Etats limites : (B.A.E.L) 83-91

Cette nouvelle théorie consiste a :

1-Définir les phénomènes que l'on veut éviter (l'état limite), ces phénomènes sont :

- Ouverture des fissures soit par :

a- Compression successive dans le béton.

b- Traction successive dans l'acier.

- Déformation importante dans l'ensemble.

2-Estimer la gravité des risques liés à ces phénomènes (on distingue les états limites ultimes et les états limites de services).

3-Dimensionner les éléments de la construction de telle manière que la probabilité d'atteindre l'un de ces phénomènes reste faible.

1. Etat limite ultime (E.L.U) :

Il correspond à la valeur maximale de la capacité portante de la construction et dont le déplacement entraîne la ruine de la construction.

Exemple :

a- Etat limite ultime d'équilibre statique de l'ouvrage : c'est la perte de la stabilité d'une partie ou de l'ensemble de la construction (le renversement).

b- Etat limite ultime de résistance de l'un des matériaux de construction : c'est la perte de résistance soit du béton soit de l'acier.

c- Etat limite ultime de stabilité de forme (flambement) : les pièces élancées soumises à des efforts de compression subissent des déformations importantes et deviennent instable.

2. Etat limite de service (E.L.S) :

il constitue des limites au-delà des quelles les conditions normales d'exploitation ne sont plus satisfaites sans qu'il y'est ruine.

Exemple :

a- Etat limite de service de compression de béton : cette limitation à pour but d'empêcher la formation des fissures.

b- Etat limite de service d'ouverture des fissures : il consiste à assurer que les armatures sont convenablement disposées dans la section et les contraintes ne dépassent pas la valeur limite.

c- Etat limite de service de déformation : il consiste à vérifier que les déformations sont inférieures à des déformations limites.

V- Règlements Algériens : (C.B.A.93)-(R.P.A.2003)

C'est les règlements techniques algérien qui viennent se substituer à la pratique admise du B.A.E.L (Béton Armé aux Etats Limites) ; en donnant des recommandations spéciales pour le pays Algérien dans le domaine parasismique R.P.A (Règlement Parasismique Algérien).

VI- Actions et sollicitations :

1- Les actions : On appelle actions, les forces et les charges appliquées aux déformations imposées. On distingue trois types d'actions :

- actions permanentes.
- actions variables (d'exploitations).
- actions accidentelles.

a- actions permanentes (G) :

Ce sont des actions continues dans l'intensité est constante ou très peu variable dans le temps. Exemple : le poids propre.

b- actions variables (Q) :

Ce sont des actions dans l'intensité varie fréquemment et d'une façon importante dans le temps. La durée d'application est très faible par rapport aux durées de vie de constructions. Les valeurs de ces charges sont fixées par le règlement, en fonction des conditions d'exploitation de la construction.

c- actions accidentelles (F_A) :

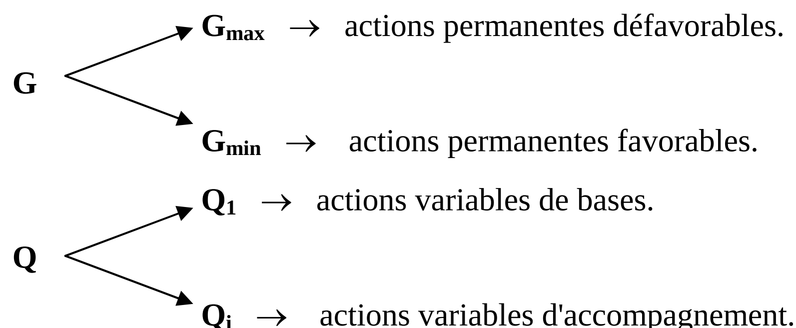
Ce sont des actions provenant de phénomènes se produisant rarement avec une faible durée d'application. Exemple : Vent, séisme…

2- Les sollicitations :

Ce sont les effort normaux et tranchants et les moments fléchissant et de torsions qui sont calculés à partir des actions en utilisant les procédés de la RDM.

3-Les combinaisons d'actions :

Pour déterminer les sollicitations, on utilise les combinaisons d'actions proposées par le CBA:



a- Etats limites ultimes : (E.L.U)

$$1,35 \cdot G_{max} + G_{min} + \gamma_{Q1} \cdot Q_1 + \sum_{i=1}^{n} 1,3\, \gamma_{Qi} \cdot Q_i$$

γ_{Q1} : coefficient multiplicateur = **1,5** dans le cas général.

Généralement la combinaison s'écrit : **1,35 . G + 1,5 . Q**

Lorsque nous introduisons les actions accidentelles elle s'écrit :

$$G_{max} + G_{min} + \sum_{i=1}^{n} \gamma_{Qi} \cdot Q_i + F_A$$

Avec : F_A : action accidentelle.

b- Etats limites de services : (E.L.S)

$$G_{max} + G_{min} + Q_1 + \sum_{i=1}^{n} \gamma_{Qi} \cdot Q_i$$

γ_{Q1} : coefficient multiplicateur

Généralement la combinaison s'écrit : **G + Q**

Chapitre III

Les composants du Béton Armé

Chapitre III : Les composants du Béton Armé

I- Le béton :

1-Définition : C'est un mélange de :

- Liant hydraulique (ciment)
- granulats (sable , gravier)
- eau
- adjuvants : c'est des produits chimiques qu'on ajoute au mélange pour améliorer une qualité.

Qualités recherchées pour un bon béton :

- Résistance mécanique élevée (25-40 MPa) .
- Imperméabilité à l'eau et absence de réaction chimique avec l'acier.
- Bonne mise en œuvre (facile à couler).
- Bonne tenue dans le temps

Ces résultats seront obtenus, en jouant sur les paramètres suivants :

- La qualité ciment, granulats.
- Le dosage (quantité).
- Un bon mélange (homogénéité).

2- Caractéristiques physiques et mécaniques du béton :

A- Masse volumique :

- La masse volumique béton à granulats courants (normal) $\rightarrow 2200 \div 2400$ kg/m^3
- La masse volumique béton à granulats légers $\rightarrow 700 \div 1500$ kg/m^3
- La masse volumique béton à granulats lourds $\rightarrow 3500 \div 4000$ kg/m^3
- La masse volumique du béton armé $\rightarrow 2500$ kg/m^3

B- Déformations du béton indépendantes des charges appliquées :

1-Déformation thermique : le coefficient de dilatation du béton varie de 7.10^{-6} à 12.10^{-6} le coefficient de dilatation de l'acier est de 11.10^{-6} , d'ou le béton armé 10.10^{-6}.

L

$$\Delta L = \pm \alpha \,.\, L \,.\, \Delta t$$

Coefficient de dilatation (α) ; Δt → Différence de température ; L : La longueur de la poutre

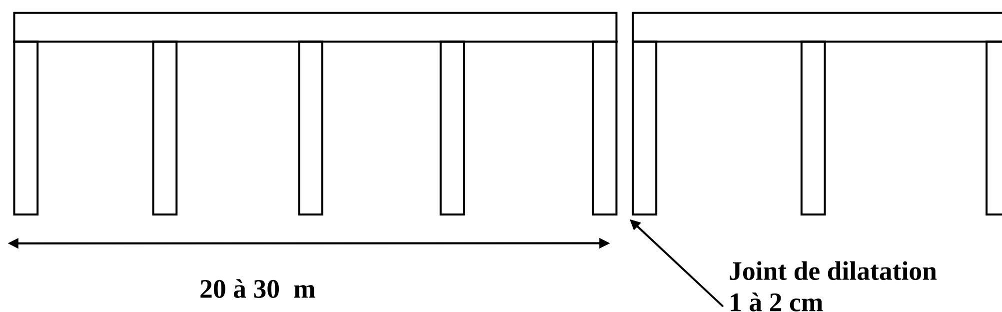
2- Le retrait hygrométrique : le béton après sa confection (fabrication) contient un excès d'eau, si le durcissement se fait à l'air libre l'eau va s'évaporer. Cette évaporation

s'accompagne automatiquement par une diminution du volume. Cette diminution s'appelle **le retrait**.

3- Facteur et influence du retrait : le retrait augmente avec :

- la proportion d'éléments fin : le retrait augmente si l'élément est fin.
- la quantité du ciment : le retrait augmente si la quantité du ciment augmente.
- addition des adjuvants : plus d'eau qui réagit.
- la sécheresse de l'air : plus le climat est sec plus il y'a du retrait.

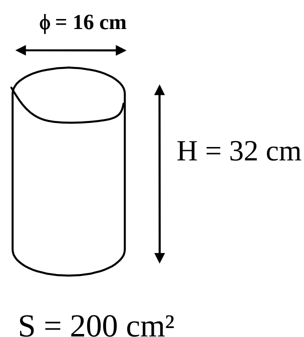
Pour les constructions courantes, les effets du au variation de température et au retrait seront négligés, si on prévoit des joints de dilatation tout les 20 à 30 mètre.



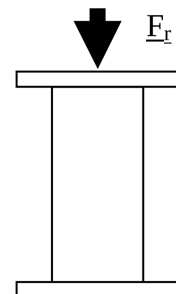
c- déformation du béton sous actions courte durée (< 24 H) :

1- Résistance à la compression :

a- Essai de compression : l'essai est effectué sur des cylindres en béton comme suit :



S = 200 cm²



$$\sigma = \frac{4.F_r}{\pi.\phi^2}$$

b- Evolution de la résistance à la compression avec l'âge du béton :

La résistance à la compression varie dans le temps selon la loi suivante :

$$f_{cj} = \frac{j}{4,76 + 0,83j} . f_{c28} \qquad \text{pour } f \leq 40\,\text{MPa}$$

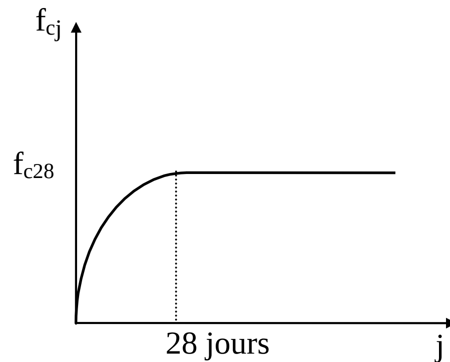
$$f_{cj} = \frac{j}{1,4 + 0,95j} . f_{c28} \qquad \text{pour } f \succ 40\,\text{MPa}$$

J < 28 jours

$$f_{cj} = f_{c28} \qquad \text{pour } j \geq 28\,jour$$

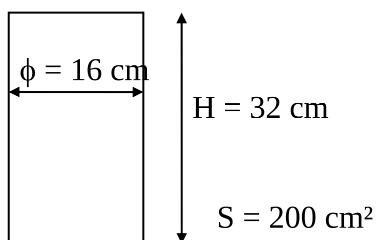
f_{cj} : la résistance à la compression à **j** jour.

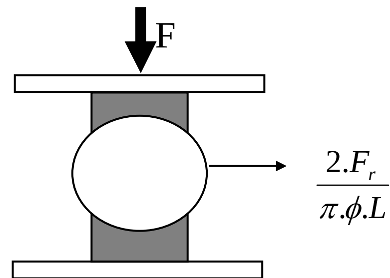
f_{c28} : la résistance à la compression à **28** jour ; On appelle aussi la résistance caractéristique du béton.



2- Résistance à la traction :

a- Traction par fendage :

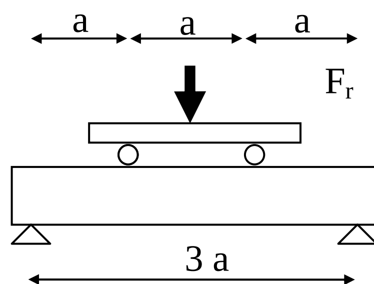




b- Traction par flexion :

a : une valeur donnée.

F_r : force de rupture.



a

a

$\frac{1,8.F_r}{a^2}$

c- Résistance caractéristique à la traction :

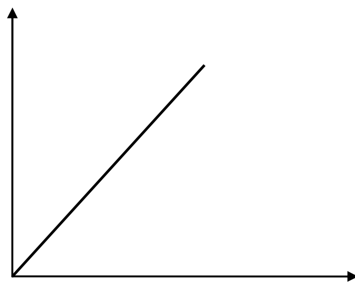
$$f_{tj} = 0,6 + 0,06 \,.\, f_{cj}$$

f_{cj} : la résistance à la compression à j jour.

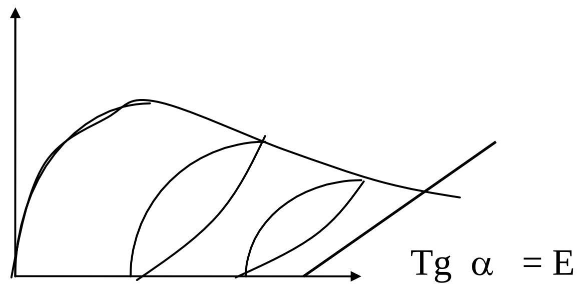
f_{tj} : la résistance à la traction compression à j jour.

3- Module de déformation instantané :

Le béton n'est pas un matériau élastique, pendant le déchargement de l'éprouvette, on observe que la courbe de déchargement est décalée par rapport à la courbe de chargement.



Quand le matériau est élastique



Quand le matériau n'est pas élastique

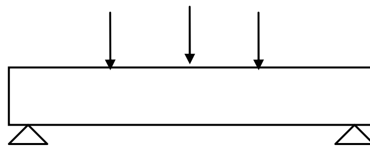
On admet la relation suivante sous des contraintes normales d'une durée d'application < 24 H.

$$\mathbf{E_{ij} = 11000\ (f_{cj})^{1/3}}$$

i : instantané ; j : jour

4- Déformation du béton sous actions de longues durées : (le fluage)

1. définition : le fluage c'est l'augmentation dans le temps de la déformation relative sous des contraintes permanentes; ça veut dire si on maintient l'effort constant l'éprouvette va se déformer.



Le fluage

2-Facteurs influençant le fluage : le fluage augmente avec la quantité d'eau ajoutée et la sécheresse de l'eau . Il diminue si le dosage en ciment augmente et avec l'âge de l'échantillon à l'essai.

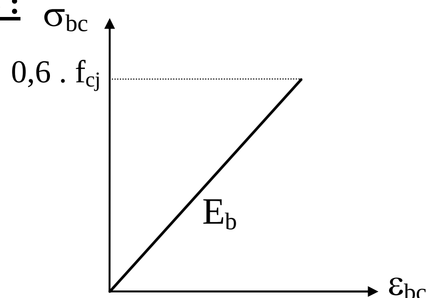
3-module de déformation différé : il est donne par la relation suivante :

(différé ≠ instantané) .

$$\mathbf{E_{vj} = 1/3 \cdot E_{ij} = 3700 \cdot (f_{cj})^{1/3}}$$

5-Diagramme contrainte /déformation de calcul :

E .L .S :

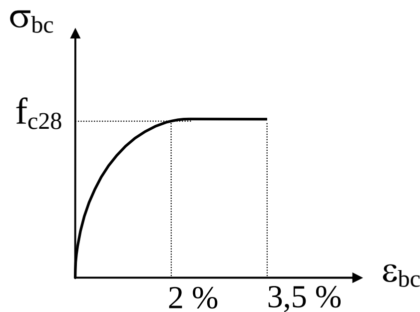


E_b : module de déformation du béton

E_s : module de déformation de l'acier

- Le rapport E_s/E_b est appelé coefficient d'équivalence : **n = 15.**

E .L .U : On adopte le diagramme parabole-rectangle.



$$0 \leq \varepsilon_{bc} < 2\ / \quad \rightarrow \quad \sigma_{bc} = \frac{0{,}85.f_{cj}}{\gamma_b}.\left[1-\left(\frac{2.10^{-3}-\varepsilon_{bc}}{2.10^{-3}}\right)^2\right]$$

$$0 \leq \varepsilon_{bc} < 2\ / \quad \rightarrow \quad \sigma_{bc} = \frac{0{,}85.f_{cj}}{\gamma_b}.$$

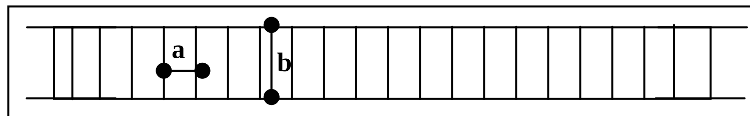
γ_b : coefficient de sécurité qui prend les valeurs

γ_b = 1,5 cas général

γ_b = 1,15 cas accidentel

6-Condition de pénétration du béton dans les moules :

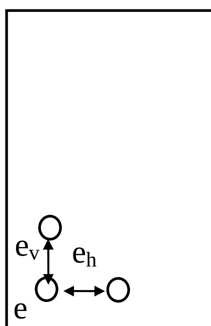
Durant sa mise en place, le béton doit passer à travers les mailles qui sont obtenus avec le ferraillage. Ces mailles sont caractérisées par un rayon $r = \dfrac{\text{la surface}}{\text{le périmètre}}$ de la plus petite maille qui existe.



La difficulté opposée au remplissage d'un moule augmente à mesure que :

1. La dimension maximale du grain augmente (Cg) Cg = 25 mm.
2. Le pourcentage des graviers est élevé.
3. Si les graviers sont anguleux.
4. La consistance du béton est plus ferme.
5. Les moyens de vibration n'existent pas.

Le règlement B.A.E.L donne les dispositions suivantes pour avoir un bétonnage correct :



$e_v \geq Cg$

$e_h \geq 1{,}5.Cg$

$e \geq Cg$

$r \geq \dfrac{Cg}{1{,}4}$ gravier roulé

$r \geq \dfrac{Cg}{1{,}2}$ gravier concassé

7- Ouvrabilité : Elle se définie comme la facilité de mise en œuvre du béton pour le remplissage parfait des coffrages. L'ouvrabilité dépend la plupart du temps de la qualité de l'ouvrage :

1. la résistance.
2. l'enrobage et l'adhérence des armatures.

Elle se mesure avec les essais suivants :

- cône d'ABRAHAMS.
- table à secousse.
- maniablimètre.

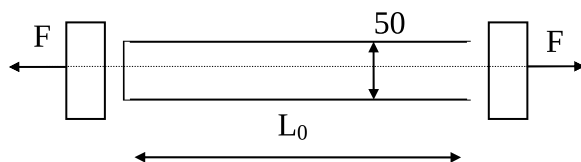
II- Acier :

1. **Généralité :** C'est l'alliage fer et carbone. On distingue des aciers doux, des aciers mi-durs et des aciers durs.

Acier doux → % carbone 0,15 - 0,25 %

Acier mi dur et dur → % carbone 0,25 - 0,45 %

2. **Essai de traction :**

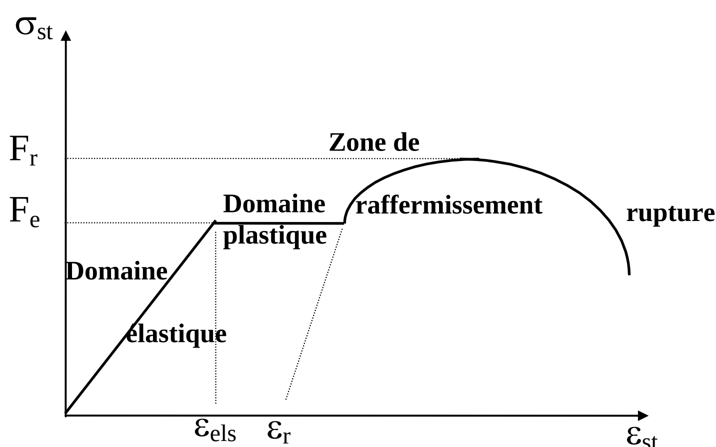


Enregistrer F et ΔL

contrainte / déformation

$$\sigma_{st} = \frac{F}{S_0} \qquad \varepsilon_{st} = \frac{\Delta l}{l_0}$$

le diagramme contrainte - déformation pour les aciers doux aura l'allure suivante :



Dans le domaine élastique, l'expression de la contrainte en fonction de l'allongement sera : $\sigma_{st} = E \cdot \varepsilon$

avec : **E** = 200 000 MPa le module de young

ε : la déformation.

La contrainte correspondante à la limite de proportionnalité entre contrainte et déformation est appelée limite élastique ou limite d'élasticité, elle est notée par F_e.

Dans la zone de raffermissement la contrainte atteint un maximum; on appelle contrainte de rupture et elle sera notée par F_r.

3- Différent types d'aciers :

- Acier rond lisse.
- Acier haute adhérence.
- Treillis soudés.

1. Acier rond lisse : l'acier se forme de barre, en principe d'une longueur de **12 m** et une section circulaire et il ont une surface qui est lisse. Les diamètres généralement utilisés sont les suivants :

6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 14 ; 16 ; 20 ; 25 ; 32 ; 40mm.

Les ronds lisses sont utilisés en deux nuances (catégories).

Qui sont notées par : FeE220 ou FeE215 fe = 215 Mpa.

FeE240 ou FeE235 fe = 235 Mpa.

Nuance	**Fe (MPa)**	ε	F_r
FeE215	215	1,075	330 - 490
FeE235	235	1,175	410 - 490

2. Acier haute adhérence : les barres à haute adhérence ont une section sensiblement circulaire qui présente des nervures d'une hauteur de 0,5 à 3 mm (la hauteur est suivant le diamètre) pour améliorer l'adhérence entre l'acier et le béton. Les diamètres ou les barres à haute adhérence utilisés sont : 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 14 ; 16 ; 20 ; 25 ; 25 ; 32 ; 40 mm.

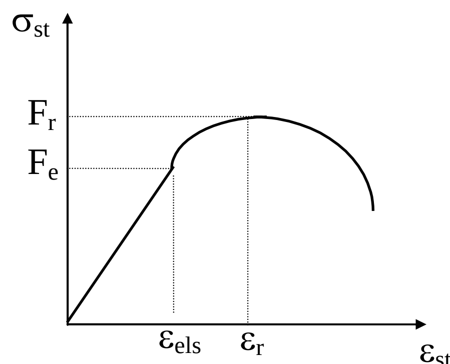
les hautes adhérences se divisent en deux nuances :

FeE400 → Fe = 400 MPa.

FeE500 → Fe = 500 MPa.

Nuance	**Fe (MPa)**	ε	**Fr**
FeE400	400	2	480
FeE500	500	2,5	550

le diagramme contrainte - déformation pour les hautes adhérences sont les suivant :



3- Les treillis soudés : certain élément dans le B.A tel que les dalles, les murs voile sont armé suivant deux directions perpendiculaire. On utilise pour cela les treillis soudés qui sont constitués par des fils se croisant et qui seront soudés aux point du croisement. Les treillis soudés sont composés de fils porteurs de diamètre plus important disposés dans le sens des efforts principaux et de fils de répartition de diamètre plus faible, disposés dans le sens perpendiculaire.

Les diamètres couramment utilisés sont les suivants :

3 - 3,5 - 4 - 4,5 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10 - 12 mm.

Les espacements entre fils porteurs : 75 - 100 - 125 - 150 - 200 mm.

Les espacements entre fils de répartition : 100 - 150 - 200 - 250 -300 mm.

4-Désignation des aciers :

Rond lisse : → **n ϕ d**

- n → Nombre de barres utilisées
- ϕ → Rond lisse
- d → Le diamètre

Exemple :

4 ϕ 16 = 4 barres rond lisse de diamètre 16 mm

Haute adhérence (HA , T) :

Exemple : 3 HA 12

3 T 12

3 barres hautes adhérence de diamètre 12 mm

Les treillis soudés (TS) :

TS 6/4 150/200

- Porteur / Répartition
- 6/4 → Diamètres des fils
- 150/200 → Espacements entre fils

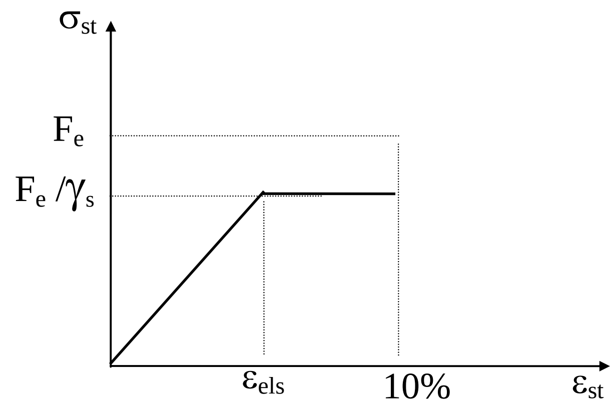
5- Diagramme Contrainte - Déformation de calcul :

5.1-E .L . U : en limite d'allongement des aciers à la valeur à 10 %.

γ_s : coefficient de sécurité

γ_s = 1,15 dans le cas général.

γ_s := 1 dans le cas accidentel.



5.2-E . L .S : En adopte le diagramme linéaire suivant :

E_s : module d'élasticité sera limité uniquement dans l'état limité d'ouverture des fissures .

1- Fissuration peu préjudiciable ⇒ limitation à **Fe** (aucune vérification)

2-Fissuration préjudiciable : $\sigma_{st} \leq \min\left(\frac{2}{3}Fe \,;\, 110\sqrt{\eta . f_{t28}}\right)$

3- Fissuration très préjudiciable : $\sigma_{st} \leq \min\left(\frac{1}{2}Fe \,;\, 90\sqrt{\eta . f_{t28}}\right)$

η : Coefficient de fissuration ⇒ η = 1 pour rond lisse

Chapitre IV

Association Béton - Acier

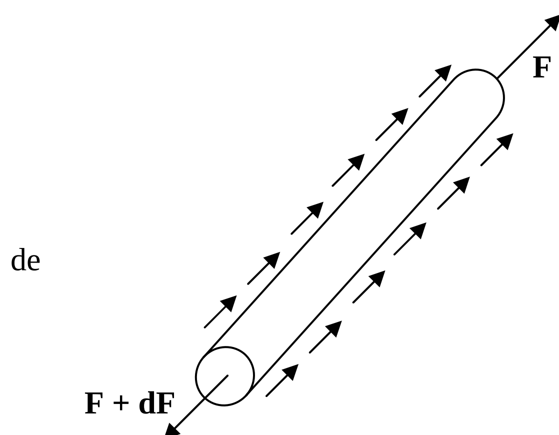
Chapitre IV : Association Béton - Acier

I- Généralité : L'association béton /acier est efficace pour les raisons suivantes :

- Le béton résiste aux essais à la compression.
- L 'acier résiste aux essais à la traction.
- L 'acier adhère au béton, se qui permet la transmission des efforts d'un matériaux à l'autre .
- Il n'y a pas de réaction chimique entre l'acier et le béton et en plus le béton protège l'acier de la corrosion .
- Le coefficient de dilatation des deux matériaux est pratiquement le même.

II- L'adhérences :

1-Définition : Dans les constructions du béton armé les efforts sont appliqués au béton et non pas aux aciers ceux-ci seront sollicités grâce à laissons avec le béton. La transmission des efforts à lieu le long de la surface latérale des barres grâce au phénomène d'adhérence. L'adhérence désigne l'action des forces de liaisons qui s'opposent au glissement des barres suivant l'axe par rapport au béton qui l'entoure. Ces forces de liaisons sont mesurées par la contrainte d'adhérence qui est définie comme étant le rapport entre la variation par unité de longueur de l'effort axial équilibré par la barre et le périmètre de cette barre.



$$\tau = \frac{dF}{dx} \cdot \frac{1}{U}$$

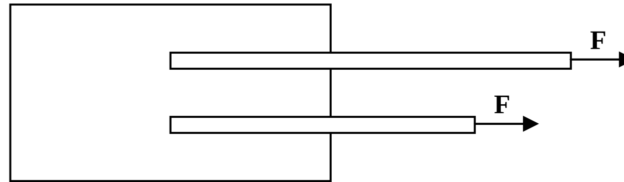
$\frac{dF}{dx}$: la variation de l'effort axial par unité de longueur.

U : le périmètre de la barre.

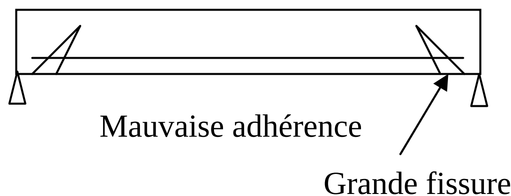
2. Fonctions d'adhérence :

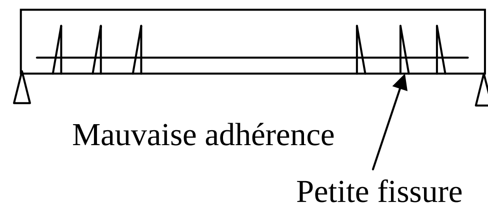
a. Entraînement des barres : L'association entre le béton et l'acier est efficace parce qu'il y a adhérence entre deux matériaux ; ce qui permet le transfert des efforts entre eu.

b. Ancrage des barres : Appelé scellement, si la barre est trop courte, elle risque de s'arracher du béton sous l'effet de l'effort de traction. La barre doit être suffisamment longue pour être convenablement ancrée (scellée) et pour reprendre tout les efforts de traction.



c. distribution de la fissuration : L'adhérence permet de répartir les fissures. Plus l'adhérence est grande (meilleure), plus le nombre de fissure augmente mais la largeur cumulée reste la même, donc l'adhérence évite la formation de grandes fissures concentrées.





3. **Facteurs agissant sur l'adhérence :**

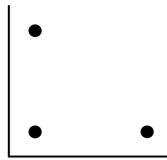
a . Etat de surface des barres : les surfaces rugueuses augmentent le frottement entre le béton et l'acier et par conséquent augmente l'adhérence. La résistance de barres au glissement est caractérisée par deux coefficients :

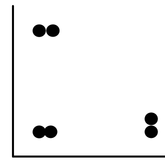
η : Coefficient d'adhérence ou de fissuration.	**η = 1**	**pour R.L**
	η = 1,6	**pour H.A**
ψ : Coefficient de scellement (ancrage)	**ψ = 1**	**pour R.L**
	ψ = 1,5	**pour H.A**

b. Forme des barres : l'adhérence circulaire (rond) est supérieure à celle des barre ayant une autre forme.

c. groupement d'armatures :

- l'adhérence d'une barre individuelle est supérieure à l'adhérence de deux barres groupée.
- l'adhérence de deux barres groupée dans le sens verticale est supérieure à l'adhérence de deux barres groupées horizontalement.

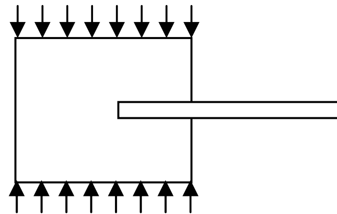




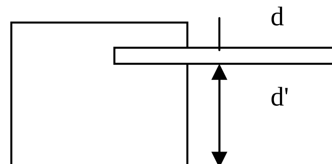
• > ⁚ ⁚ > ••

<u>d. La résistance du béton :</u> L'adhérence augmente avec l'augmentation de la résistance à la compression du béton.

<u>e. La compression transversale :</u> Dans une pièce comprimée, l'adhérence va augmenté par la contrainte crée (le serrage).

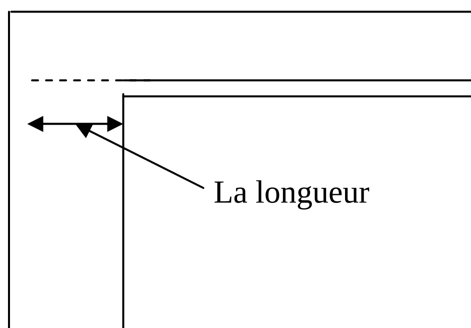


<u>f. L'épaisseur du béton :</u> Plus l'élément est épais plus l'adhérence est assurée car l'épaisseur du béton évite l'éclatement.



III. Ancrage des barres :

1. **Définition :** La longueur d'ancrage sera la longueur nécessaire pour équilibrer l'effort axial exercé sur la barre. Sur la longueur d'ancrage la contrainte d'adhérence sera supposée constante est égale à sa valeur limite ultime qui est la suivante :



$$\tau_s = 0{,}6 \,.\, \psi^2 . f_{tj}$$

ψ : Coefficient de scellement.

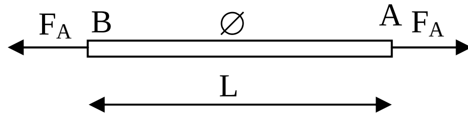
$\psi = 1$ pour R.L

$\psi = 1{,}5$ pour H.A

2-Ancrages rectilignes :

a - Variation de l'effort axial le long d'une barre droite :

La variation de l'effort F_A - F_B sera transmise au béton qui équilibre cette effort par l'adhérence.



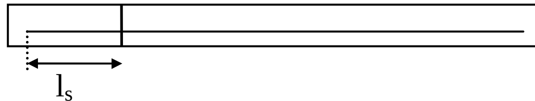
$$\tau_s = \frac{dF}{dx}.\frac{1}{U}$$

$\Rightarrow$ $dF = \tau_s . U . dx$

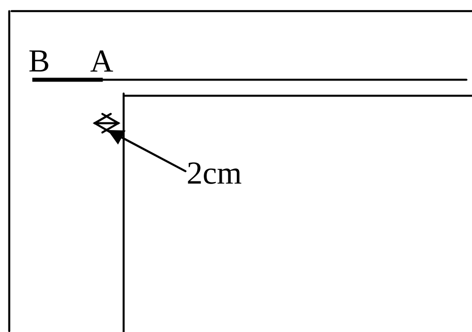
en intégrant $\int_{F_A}^{F_B} dF = \int_A^B \tau_s .U.dx$

$\Rightarrow$ $F_B - F_A = \tau_s . U . L = \tau_s . \pi . \varnothing . L$

b- Longueur de scellement droit :



la longueur de scellement droit l_s sera la longueur nécessaire pour une barre rectiligne de diamètre ∅ soumise à une contrainte égale à sa limite élastique soit convenablement ancrée (ancrage total) .



$F_A = F_B + \tau_s . \pi . \varnothing . L$

B extrémité de la barre $\Rightarrow F_B = 0$

$F_A = \tau_s . \pi . \varnothing . L_s$

L'ancrage sera dit total si l'effort F_A sera l'effort ultime de la barre :

$$F_A = \frac{\pi.\phi^2}{4}.fe$$

pour déterminer la longueur de scellement "L_s" il faut donc :

$$\tau_s.\pi.\phi.L_s = \frac{\pi.\phi^2}{4}.fe$$

d'où :

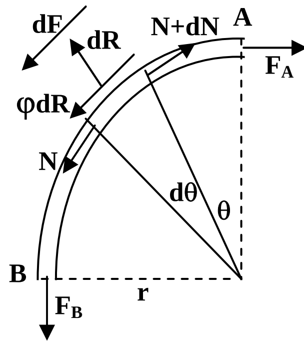
$$L_s = \frac{\phi}{4}.\frac{fe}{\tau_s}$$

3- Les ancrages courbes : La longueur Ls est souvent trop importante par rapport à ce que l'on dispose pour cela, on utilise les ancrages courbes.

a- Variation de l'effort axial le long d'une barre courbe:

le long d'une barre courbe, l'effort axial varie en fonction de deux choses :

1. l'adhérence entre le béton et l'acier.
2. en fonction du frottement résultant de la réaction du béton sur la barre, le coefficient de frottement Acier-Béton sera noté :



φ = 0,4

- FA et FB sont des efforts aux extrémités du tronçon courbe.
- N et N+dN sont les efforts aux extrémités d'un petit élément.
- dR et φdR sont les composantes normale et tangentielle de la réaction du béton sur la barre.
- dF est la force d'adhérence qui sera donnée par :

dF = $\tau_S . \pi .. \varnothing . r \, . \, d\theta$

avec r : le rayon de courbure.

En vecteur nous avons : $\overrightarrow{N} + \overrightarrow{N + dN} + \overrightarrow{dF} + \overrightarrow{dR} + \overrightarrow{\varphi dR} = \vec{0}$

Projection sur la normale : $dR - N.\sin\frac{d\theta}{2} - (N + dN)\sin\frac{d\theta}{2} = 0$

$$\frac{d\theta}{2} \approx 0 \;\Rightarrow\; \sin\frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2}$$

$$dR - N\frac{d\theta}{2} - N\frac{d\theta}{2} - dN.\frac{d\theta}{2} = 0 \quad (dN.\frac{d\theta}{2} \text{ est négligeable})$$

$$dR - 2.N.\frac{d\theta}{2} = 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{dR = N.d\theta}$$

Projection sur la tangente : $- dF - \varphi dR - N.\cos\frac{d\theta}{2} + (N + dN).\cos\frac{d\theta}{2} = 0$

$$\frac{d\theta}{2} \approx 0 \Rightarrow \cos\frac{d\theta}{2} \approx 1$$

$$\Rightarrow \quad - dF - \varphi dR + N - N + dN = 0$$

$$\Rightarrow \quad - dF - \varphi dR + dN = 0 \quad \Rightarrow \quad dN = dF + \varphi dR$$

On peut écrire : $dN = \tau_S . \pi .. \varnothing . r \, . \, d\theta + \varphi \, . \, N \, . \, d\theta$

$$dN = \left(N + \frac{\pi.\phi.\tau_s.r}{\varphi} \right).\varphi.d\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{dN}{N + \frac{\pi.\phi.\tau_s.r}{\varphi}} = \varphi.d\theta$$

Après intégration : $$Ln\left(\frac{\pi.\phi.\tau_s.r}{\varphi} + N \right)\Bigg|_A^B = \varphi.\theta \quad \Rightarrow \quad Ln\left[\frac{\frac{\pi.\phi.\tau_s.r}{\varphi} + F_A}{\frac{\pi.\phi.\tau_s.r}{\varphi} + F_B} \right] = \varphi.\theta$$

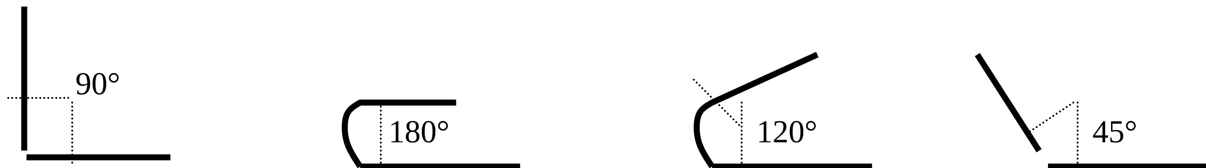
$$\Leftrightarrow \quad \frac{\frac{\pi.\phi.\tau_s.r}{\varphi} + F_A}{\frac{\pi.\phi.\tau_s.r}{\varphi} + F_B} = e^{\varphi.\theta} \quad \Rightarrow \quad F_A = F_B.e^{\varphi\theta} + \frac{\pi.\phi.r\tau}{\varphi}.(e^{\varphi\theta} - 1)$$

Posons : $\alpha = e^{\varphi\theta}$ et $\beta = \dfrac{e^{\varphi\theta} - 1}{\varphi}$

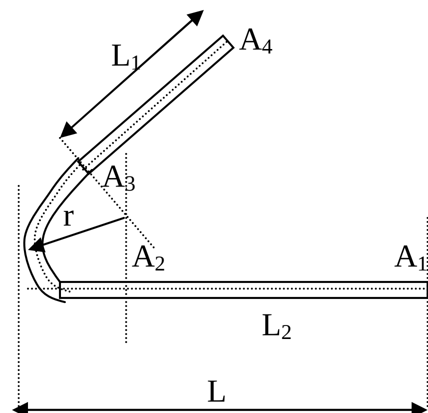
$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{F_A = \alpha \,.\, F_B + \beta \,.\, \pi \,.\, \varnothing \,.\, r \,.\, \tau_s}$$

Nous avons pour les barres : **R.L** **r = 3 . ∅**

H.A **r = 5,5 . ∅**



θ	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**	**120°**	**135°**	**150°**	**180°**
α	1,23	1,37	1,52	1,87	2,31	2,57	2,85	3,51
β	0,58	0,92	1,30	2,19	3,28	3,92	4,62	6,28



b- Calcul d'un ancrage courbe :

L : la longueur d'ancrage.

Pour un tronçon rectiligne : $F_A = F_B + \tau_s.\, \pi.\, \varnothing.\, L$

Pour un tronçon courbe : $F_A = \alpha \,.\, F_B + \beta \,.\, \pi \,.\, \varnothing \,.\, r \,.\, \tau_s$

$F_{A4} = 0$

A_4-A_3 : rectiligne $\Rightarrow F_{A3} = F_{A4} + \tau_s.\, \pi.\, \varnothing.\, L_1$

$\Rightarrow F_{A3} = \tau_s.\, \pi.\, \varnothing.\, L_1$

A_3-A_2 : courbe $\Rightarrow F_{A2} = \alpha \,.\, F_{A3} + \beta \,.\, \pi \,.\, \varnothing \,.\, r \,.\, \tau_s$

$\Rightarrow F_{A2} = \alpha \,.\, \tau_s .\, \pi .\, \varnothing .\, L_1 + \beta \,.\, \pi \,.\, \varnothing \,.\, r \,.\, \tau_s$

A_2-A_1 : rectiligne $\Rightarrow F_{A1} = F_{A2} + \tau_s .\, \pi .\, \varnothing .\, L_2$

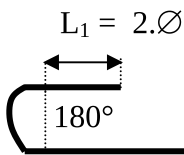
$\Rightarrow F_{A1} = \alpha \,.\, \tau_s .\, \pi .\, \varnothing .\, L_1 + \beta \,.\, \pi \,.\, \varnothing \,.\, r \,.\, \tau_s + \tau_s .\, \pi .\, \varnothing .\, L_2$ ……….*(1)*

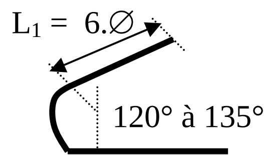
Sachant que : $F_{A1} = \tau_s .\, \pi .\, \varnothing .\, L_s$……….*(2)*

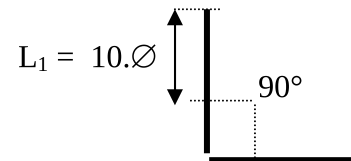
(1) = (2) $\Leftrightarrow \tau_s .\, \pi .\, \varnothing .\, L_s = \alpha \,.\, \tau_s .\, \pi .\, \varnothing .\, L_1 + \beta \,.\, \pi \,.\, \varnothing \,.\, r \,.\, \tau_s + \tau_s .\, \pi .\, \varnothing .\, L_2$

$\Leftrightarrow \quad L_s = \alpha \,.\, L_1 + \beta \,.\, r + L_2$

d'où : $\mathbf{L_2 = L_s - \alpha \,.\, L_1 - \beta \,.\, r}$

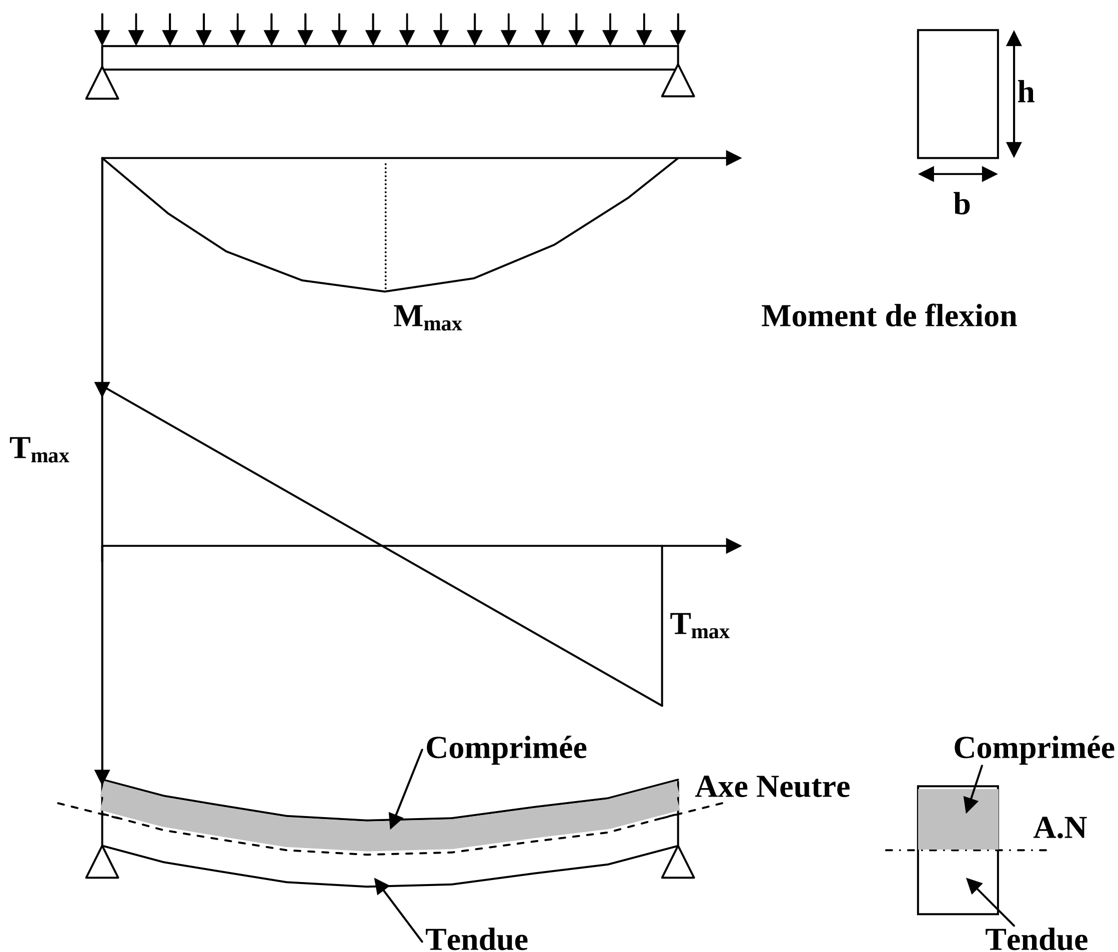




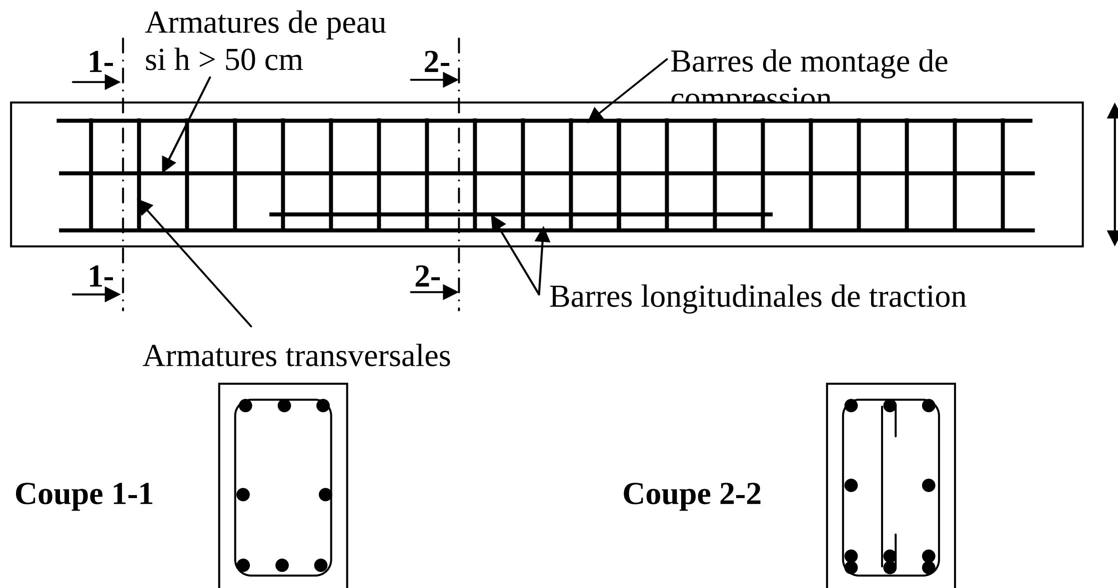


IV- Dispositions constructives:

1- Dénomination des armatures :



- Ferraillage de la poutre :

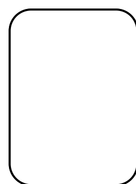


On distingue deux types d'armatures:

<u>a-Les armatures longitudinales :</u> on utilise généralement du haute adhérence avec de diamètres supérieurs ou égales à **12 mm**, elle seront disposées dans la partie tendue de la poutre pour reprendre les efforts de traction (armatures principales). Dans la partie comprimée les barres de montage qui peuvent éventuellement reprendre une partie des efforts de compression lorsque le béton ne suffit pas.

Pour les armatures de traction, il peut y avoir plusieurs nappes dans la partie ou le moment est maximum.

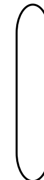
<u>b- Les armatures transversales :</u> sont appelées armatures de couture puisqu'elles coudent les fissures. Elles ont un diamètre inférieur à 10 mm. Il existe trois sorte d'armatures transversales :



cadre



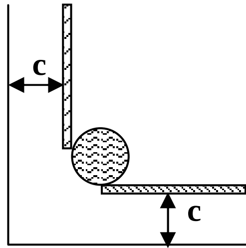
étrier



- Les armatures transversales sont disposées le long de la poutre, elles sont très rapprochées au niveau des appuis parce que l'effort tranchant est maximum.
- Les armatures transversales sont attachées aux barres longitudinales en maintenant leurs écartements.

2- Dispositions constructives génératives :

a- Protection des armatures : cette protection appelée l'enrobage **"c"**. L'enrobage de toute armature doit au moins être égal à **5cm** pour les ouvrages de mer ou exposés aux atmosphères très agressives.

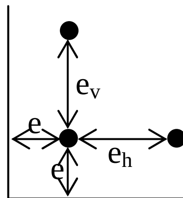


3 cm : pour les ouvrages soumis à des actions agressives et des ouvrages exposés aux intempéries (pluie, neige) ou en contact avec un liquide (pont…).

1 cm : pour les parois situées dans des locaux ouverts.

b- Distance entre barres :

-barres isolées :

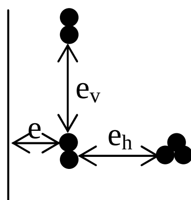


$e \geq \max(\varnothing ; C_g)$

$e_h \geq \max(\varnothing ; 1{,}5.C_g)$

$e_v \geq \max(\varnothing ; C_g)$

- groupement des barres :



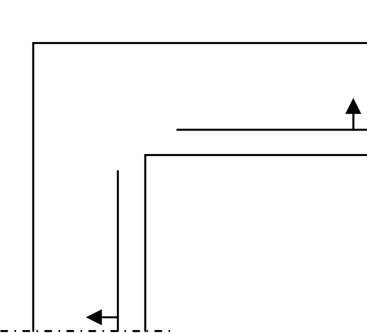
$e \geq \max(2.\varnothing ; C_g)$

$e_h \geq \max(2.\varnothing ; 1{,}5.C_g)$

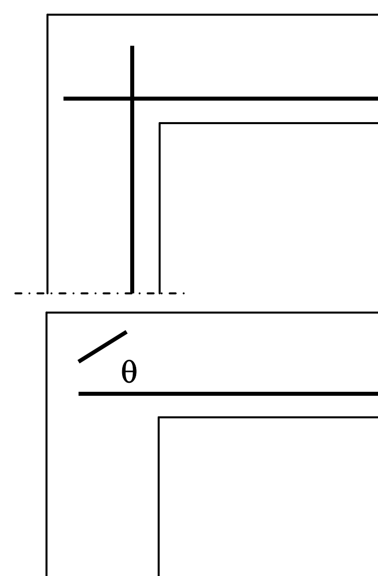
$e_v \geq \max(2.\varnothing ; C_g)$

Cg : diamètre maximum des granulats.

c- Poussée dans le vide : la présence d'ancrage courbe tente à faire fléchir la barre au point de changement de courbure. Il peut en résulter la poussée au vide capable de faire éclater le béton, alors trois solutions existent :

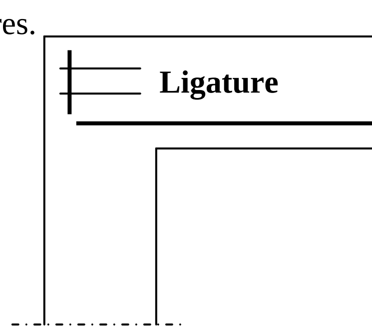


1. supprimer cette poussée en modifiant le ferraillage :



2. réduire le risque d'éclatement en inclinant la barre:

3. équilibrer la poussée, en attachant la barre par des ligatures.



3- Condition de non écrasement du béton : (rayon de courbure minimal)

Pour que la condition de non écrasement du béton soit assurée, il faut vérifier l'inégalité suivante:

$$r \geq 0,2 . \phi . \left(1 + \frac{\phi}{e_r}\right) . \lambda . \frac{\sigma_s}{f_{cj}}$$

e_r : distance de la plus proche parois.

∅ : diamètre des barres courbées.

σ_s : la contrainte de l'acier calculée dans l'état limite ultime.

λ : coefficient $\lambda = 1$ si les barres sont disposées en une seule nappe.

$\lambda = \frac{5}{3}; \frac{7}{3}; 3$ si les barres sont disposées en 2 nappes; 3 nappes; 4 nappes respectivement.



- Ancrage d'une barre comprimée : l'ancrage d'une barre comprimée courbée (ancrage courbe) est interdit. Pour une barre rectiligne l'ancrage en compression sera calculé comme suit :

$$L_{sc} = \frac{\phi}{4} . \frac{\sigma_{sc}}{\tau_s}$$

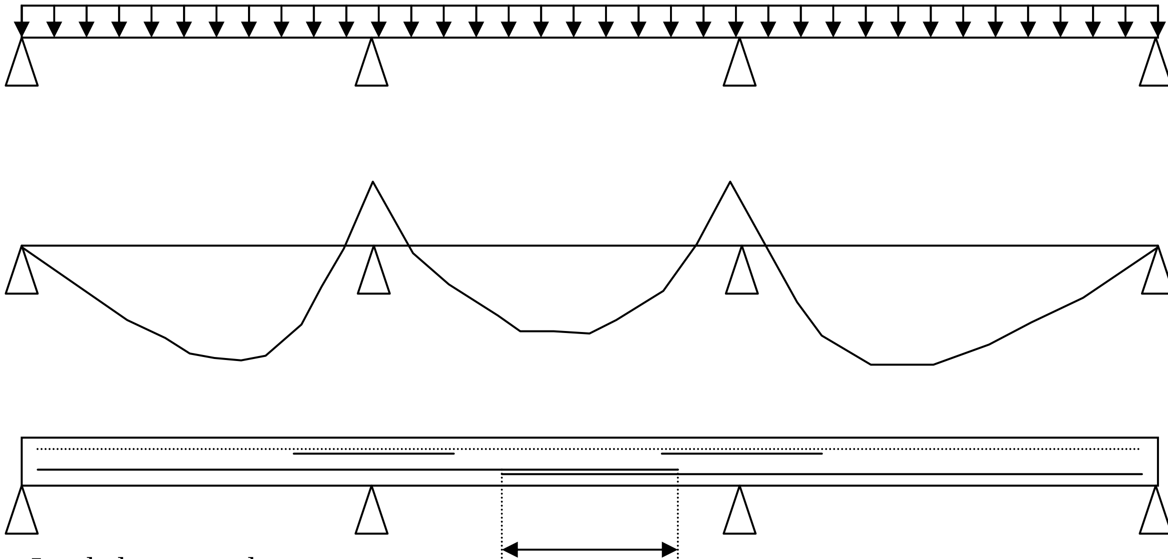
∅ : diamètre des barres.

σ_{sc} : la contrainte à la compression.

τ_s : la contrainte d'adhérence.

4- Les recouvrements :

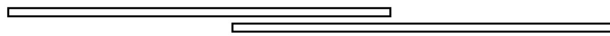
Le recouvrement est la distance de chevauchement entre deux barres adjacentes afin d'assurer la continuité lors de la transmission des sollicitations.



Lr : la longueur de recouvrement.

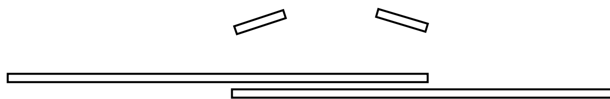
Ls : la longueur de scellement.

-recouvrement rectiligne : (droit)



$$\begin{cases} Lr \geq Ls \quad \text{Si } d < 5.\varnothing \\ Lr \geq Ls + d \quad \text{Si } d \geq 5.\varnothing \end{cases}$$

-recouvrement courbé :



$$\begin{cases} Lr \geq 0{,}4.Ls \quad \text{Si } d < 5.\varnothing \\ Lr \geq 0{,}4.Ls + d \quad \text{Si } d \geq 5.\varnothing \end{cases}$$

$$\begin{cases} Lr \geq 0{,}6.Ls \quad \text{Si } d < 5.\varnothing \\ Lr \geq 0{,}6.Ls + d \quad \text{Si } d \geq 5.\varnothing \end{cases}$$

H.A : haute adhérence.

R.L : rond lisse.

- Application :

Déterminez la longueur de scellement droit d'une barre de nuance FeE400 et de diamètre

16 mm avec f_{c28} = 25MPa.

-Puis recalculer pour un ancrage courbe de 180°.

Solution :

1°- Ancrage rectiligne :

$L_s = \frac{\phi}{4} \cdot \frac{fe}{\tau_s}$ avec $\tau_s = 0,6 \cdot \psi^2 \cdot f_{t28}$

$f_{t28} = 0,6 + 0,06 . f_{c28}$ = 0,6 +0,06 .25 = 2.1 MPa.

τ_s = 0,6 . (1,5) . 2,1 = 2,83 MPa avec ψ = 1,5 pour HA.

Donc : $L_s = \frac{16}{4} \cdot \frac{400}{2,83}$ = 565,37 mm ≈ 566 mm.

2°- Ancrage courbe :

$L_2 = L_s - \alpha . L_1 - \beta . r$

L_s = 566 mm. ; r = 5,5.∅ ; ∅ = 16mm ; L_1 = 2.∅

L_2 = 566 – 3,51 . (2 × 16) – 6,28 . (5,5 × 16)

$L_2 < 0 \Rightarrow L_2 = 0$

$L = L_2 + r + \frac{\phi}{2} = 0 + 5,5 \times 16 + \frac{16}{2}$

L = 96 mm.

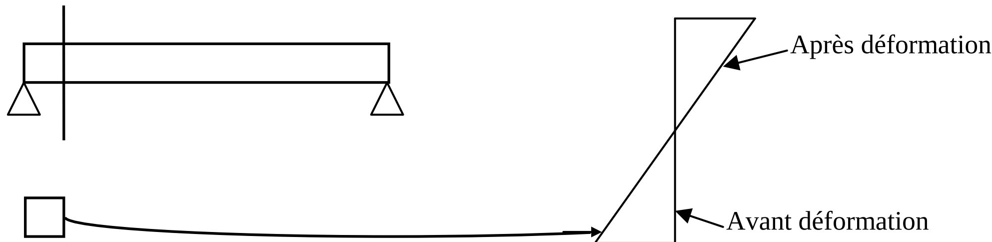
Chapitre V

Les hypothèses de calcul

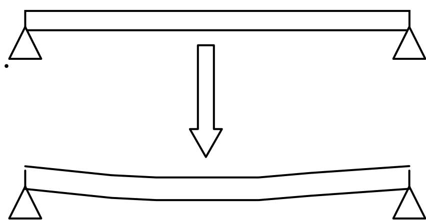
Chapitre V : Les hypothèses de calcul

I- Hypothèses à L'E .L .U :

***Hypothèse* (1) :** toute section plane avant déformation reste plane déformation.



***Hypothèse* (2) :** Il n 'est y a pas de glissement relatif entre le béton et l'acier . la déformation de deux matériaux et la même. Il résulte de cette hypothèse que les déformations des fibres sont proportionnelles à leurs distances par rapport à l'axe neutre .

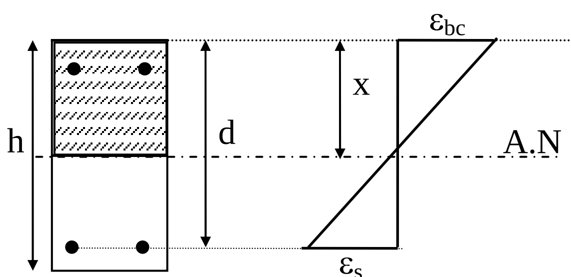


ε_{bc} : la déformation du béton à la compression

ε_s : la déformation des l'aciers tendue .

x : la distance de l'axe neutre .

d : la distance du centre de gravité aux armatures tendues.



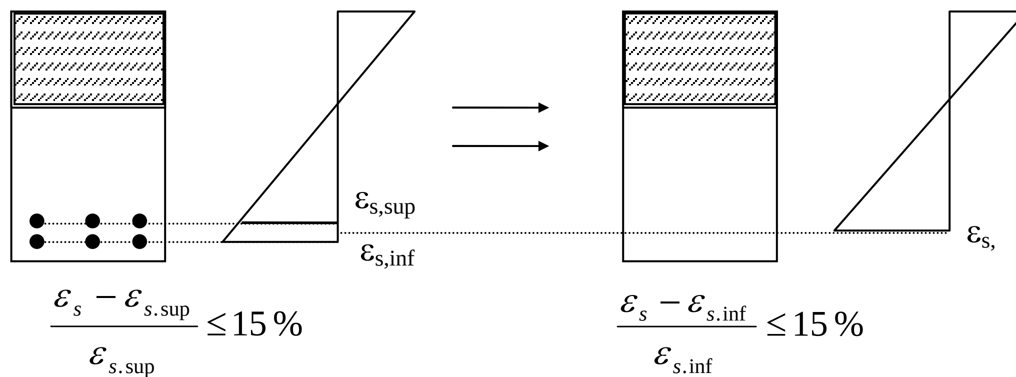
$$\alpha = \frac{x}{d} = \frac{\varepsilon_{bc}}{\varepsilon_{bc} + \varepsilon_s}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_s = \frac{1-\alpha}{\alpha} . \varepsilon_{bc}$$

ou $$\varepsilon_{bc} = \frac{\alpha}{1-\alpha} . \varepsilon_s$$

***Hypothèse* (3) :** la résistance du béton tendu est négligée.

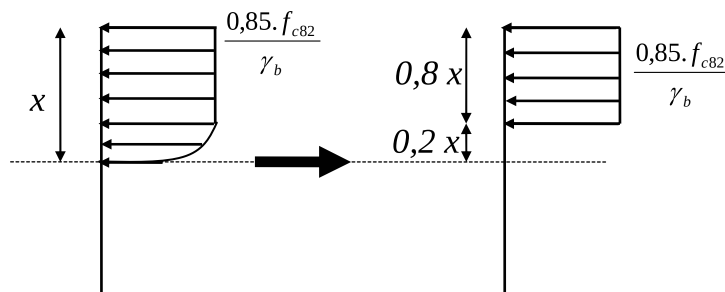
Hypothèse (4) : On suppose concentré en leur centre de gravité la section d'un groupe de plusieurs barres tendues ou comprimées, si l'erreur commise sur les déformations unitaires ne dépassent pas 15% .



Hypothèse (5) : le diagramme contrainte-déformation du béton pouvant être utilisé dans tout les cas sera le diagramme parabole-rectangle. Lorsque la section n'est pas entièrement comprimée, On peut utiliser le diagramme rectangulaire simplifié définit comme suit :

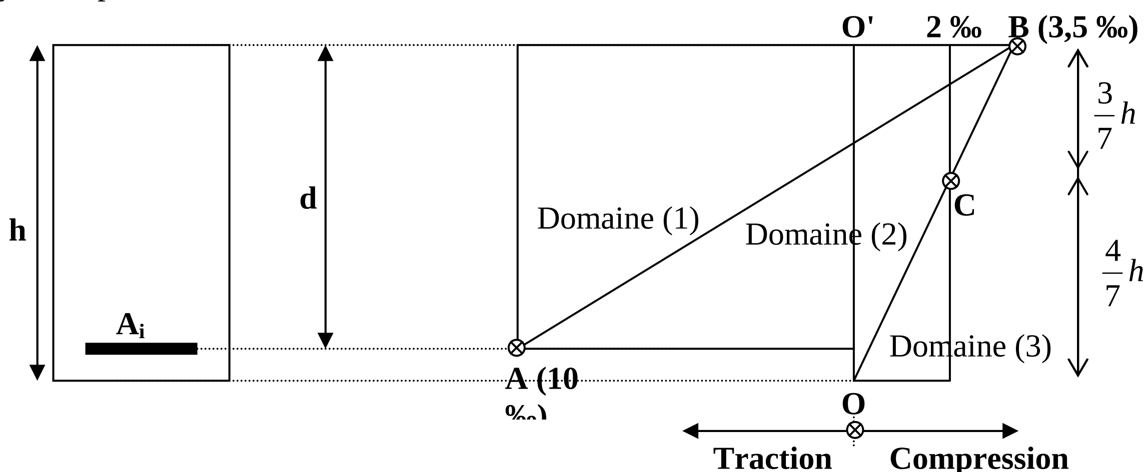
sur une distance de *0,2.x* à partir de l'axe neutre, la contrainte sera considérée comme nulle.

Sur la distance qui reste, la contrainte sera égale à $\frac{0{,}85.f_{c82}}{\gamma_b}$



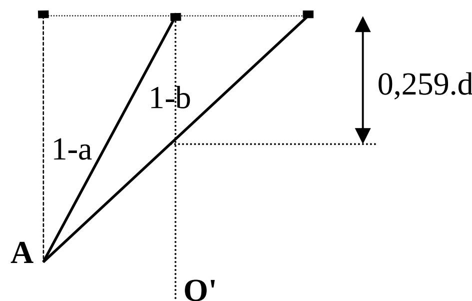
Hypothèse (6) : le raccourcissement unitaire du béton est limité de 3,5% en compression et l'allongement unitaire des aciers sera limité à 10%.

Règle des 3 pivots : Le diagramme de déformation d'une section à l'état limite ultime de résistance représenté par une droite doit obligatoirement passé par l'un des pivots A - B - C, dont la position sera définit sur la figure ci après. Cette règle se fixe comme objectif pour utilisé au mieux le béton et l'acier .

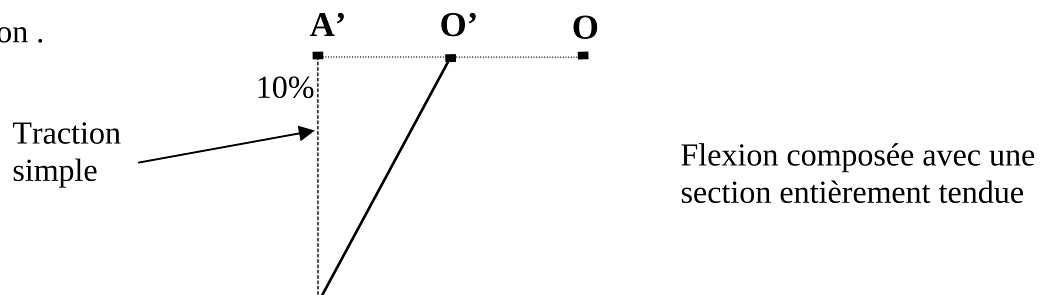


Ce diagramme sera devisé en 3 domaines

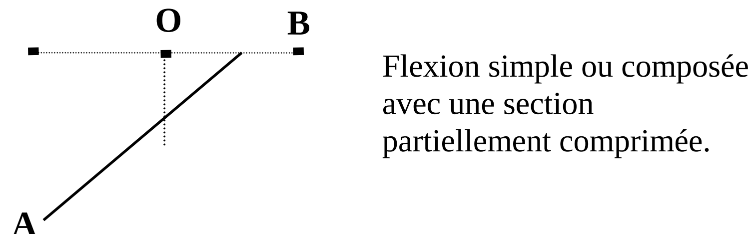
Le domaine(1) : les diagrammes passent par le pivot A qui correspond à un allongement maximum de 10%, les armature tendue supposées concentré en leur centre de gravité .on distingue deux sous domaines :



le sous domaine 1-a : le béton est toujours tendue et ne participe pas à la résistance de la section .



Le sous domaine 1-b : le béton est partiellement comprimé.

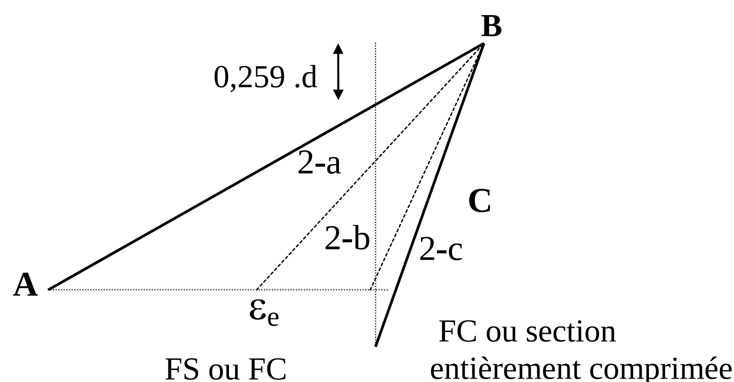


le domaine (1) sera décrit par la condition suivant :

$$0 < \alpha = \frac{x}{d} \leq \frac{\varepsilon_{bc}}{\varepsilon_{bc} + \varepsilon_{st}} = \frac{3{,}5}{3{,}5 + 10} = 0{,}259$$

$0 < \alpha < 0{,}259 \quad \Rightarrow \quad 0 < x = \alpha.d < 0{,}259.d$

Le domaine(2) : les diagrammes passent par le pivot **B** qui correspond à un raccourcissement de **3,5%** de la fibre la plus comprimée. On distingue 3 sous domaines.



Sous domaine 2-a : l'allongement des armatures est supérieure à l'allongement élastique (ε_{es}) donc les armatures sont plastifiée .

Sous domaine 2-b : L'allongement des armatures tendues est inférieure à l'allongement étatique (ε_{es}) et la contrainte dans les aciers sera inférieure à f_e/γ_s.

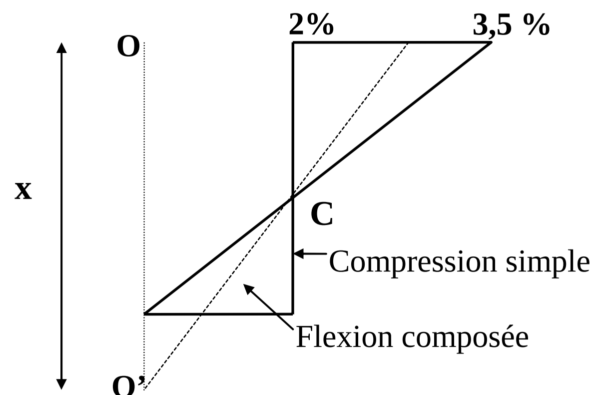
Sous domaine 2-c : les armatures seront comprimées et le domaine(2) sera d'écrit par la condition :

$$0,259 \leq \alpha \leq \frac{h}{d}$$

. ***Le domaine(3) :***les diagrammes passent par le pivot qui correspond à un raccourcissement de **2%** de la fibre du béton située à $\frac{3}{7}h$ de la fibre supérieure. La section est entièrement comprimée .

le domaine (3) se d'écrit par la condition :

$\alpha \leq h/d$.



II- Hypothèses à l'E .L .S (durabilité de la structure) :

Hypothèse (1) **:** les sections droites planes avant déformation restent planes après déformation

→et Il n'est y a pas de glissement relatif entre le béton et l'acier .

Hypothèse (2) **:** le béton tendue est négligé.

Hypothèse (3) : le béton et l'acier seront considéré comme des matériaux linéaires élastiques, donc on leur applique la loi de HOOKE ⇔ **σ = E . ε**

ε

$$\left.\begin{matrix}\sigma_b = E_b.\varepsilon_b \\ \sigma_a = E_a.\varepsilon_a\end{matrix}\right\rangle \Rightarrow \varepsilon_s = \varepsilon_b \Rightarrow \frac{\sigma_b}{E_b} = \frac{\sigma_s}{E_s}$$

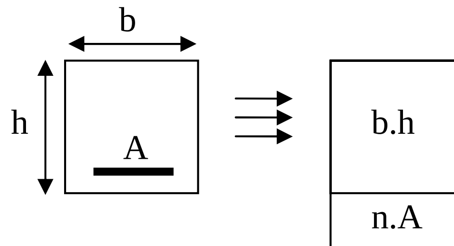
$\sigma_s = \sigma_b . \frac{E_s}{E_b}$ On a : $\frac{E_s}{E_b} = n$ n : coefficient d'équivalence.

$n = \frac{E_s}{E_b}$ ⟶ 200000 MPa ; $3700\sqrt[3]{f_{cj}}$ MPa ; $11000\sqrt[3]{f_{cj}}$ MPa

donc : ***n*** **= 15**

-**Homogénéisation de la section :** pour pouvoir appliquer au béton armé qui est un matériau hétérogène les règles de RDM pour les corps homogènes, Il sera nécessaire d'homogénéiser la section de béton armé. Une section d'acier travaille

n fois plus qu'une même section de béton. Donc une section d'acier ⇔ ***n*** fois qu'une section de béton. Pour homogénéiser la section de béton armé, on remplace la section d'acier par ***n*** fois sa section de béton.



Hypothèse(4) : On ne tient pas conte du fluage de béton et du retrait.

Hypothèse(5) : On suppose concentré on leur centre de gravité un ensemble de plusieurs barres.

III- Hypothèses à l'E .L .S de compression du béton : La contrainte de compression du béton est limitée à $0,6.f_{c28}$.

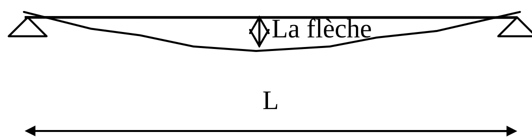
$$\sigma_b \leq 0,6\, f_{c28}.$$

Ce risque n'existe que dans le cas ou le pourcentage d'armature est élevé.

$$A / bd \geq 2\%.$$

IV- Hypothèse à l' E .L .S de déformation :

La flèche d'une poutre ne doit pas dépassée.



$$\frac{L}{500} \quad \text{si} \quad L \leq 5\,\text{m}$$

$$\frac{L}{1000} + 0,5\text{cm} \quad \text{si} \quad L > 5\,\text{m}$$

L est exprimée en cm.

V- Hypothèse à l' E .L .S d'ouverture des fissures :

1°-Si la fissuration est peu préjudiciable : Aucune vérification n'est demandé et la contrainte dans les aciers n'est pas limitée. La fissuration est considérée comme peu préjudiciable, lorsque l'élément à vérifier est situé dans les locaux ouverts.

2°. Si la fissuration est préjudiciable : la fissuration considérée comme préjudiciable si les éléments sont exposés aux intempérie (pluie, neige, vent...) ou bien en contact avec l'eau. La contrainte de traction dans les armatures tendues sera limitée à la valeur suivante :

$$\sigma_{st} \leq \min\left(\frac{2}{3}.fe\ ;\ 110\sqrt{\eta.f_{t28}}\right)$$

f_e : limite élastique.

η : coefficient de fissuration. $\Rightarrow$ *η = 1 pour R..L* *et η = 1,6 pour H.AL*

f_{t28} : la contrainte du béton à la traction à 28 j.

3°. Si la fissuration est très préjudiciable : la fissuration sera considérée comme très préjudiciable si l'élément est soumis à un milieu agressif. La contrainte de traction des armatures tendues sera limitée par la valeur suivante :

$$\sigma_{st} \leq \min\left(\frac{1}{2}.fe\ ;\ 90\sqrt{\eta.f_{t28}}\right)$$

- Application :

Soit des barres utilisées dans une construction qui se trouve dans un milieu agressif, de nuance FeE400 le béton aune résistance de f_{c28} = 25 MPa.

- Calculez les contraintes limites à l'E.L.S?

- Solution

- Contrainte limite du béton : $\overline{\sigma_{bc}}$ = 0,6 . f_{c28} = 0,6 . 25 = 15 MPa.

- Contrainte limite de l'acier : - fissuration très préjudiciable.

D'ou : $\sigma_{st} \leq \min\left(\frac{1}{2}.fe\ ;\ 90\sqrt{\eta.f_{t28}}\right)$

f_{t28} = 0,6 + 0,06 . f_{c28} = 0,6 + 0,06 . 25 = 2,1 MPa.

$$\sigma_{st} \leq \min\left(\frac{1}{2}.fe\ ;\ 90\sqrt{\eta.f_{t28}}\right) \Leftrightarrow \sigma_{st} \leq \min\left(\frac{1}{2}.400\ ;\ 90\sqrt{1{,}6.\,2{,}1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sigma_{st} \leq \min(200\ ;\ 164{,}97)$$

$$\Leftrightarrow \sigma_{st} = 164{,}97 \text{ MPa}$$

Chapitre VI

La traction simple

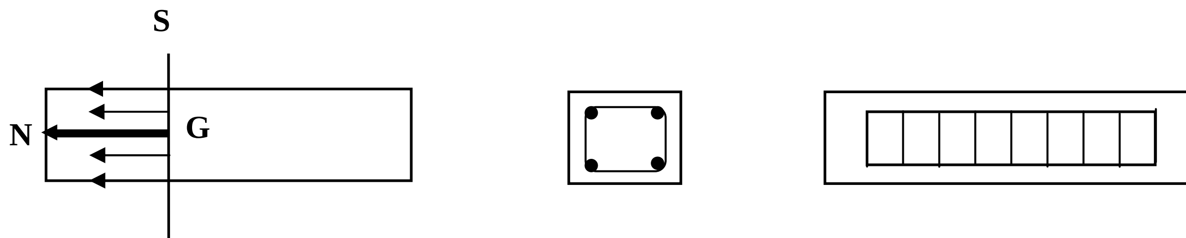
Chapitre VI : La traction simple

I- Définition :

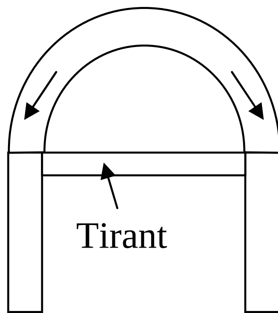
Une pièce est sollicitée en traction simple si l'ensemble des forces extérieures agissant d'un même coté d'une section se réduit à une force normale volumique est perpendiculaire à la surface est appliquée au centre de gravité.

Dans chaque section droite le centre de gravité des armatures longitudinales coïncide avec le centre de gravité du béton et avec le point d'application de la force de traction.

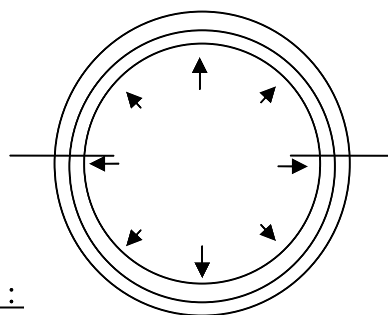
Les pièces soumises à la traction seront appelées **des tirants**.

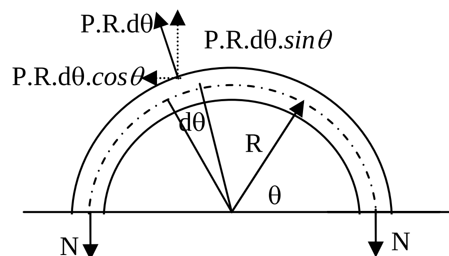


1. Tirants rectilignes : ils sont normalement utilisés pour les couvertures voûtées des bâtiments industriels ou bien pour les mosquées. Les armatures résistent à l'effort de traction selon les armatures longitudinales. Les armatures transversales ne jouent qu'un rôle de montage. La section de béton devra être aussi petite que possible et les barres doivent être réparties uniformément dans la section (il faut respecter le symétrie et choisir un nombre paire).



2. Tirants circulaires : ils sont normalement utilisés dans les parois de réservoirs circulaires et des silos.





Projection verticale :

$$\int_0^{\pi} \mathrm{P.R.Sin}\,\theta.d\theta - 2.N = 0$$

$$-P.R.\cos\theta\Big|_0^{\pi} - 2.N = 0 \quad \Rightarrow \quad 2.\,P\,.\,R \;\; - 2N = \;0$$

d'ou : $\boldsymbol{N = P.R}$

I- Détermination des armatures :

1. Condition de non-fragilité : la section tendue ou fléchie est considérée comme non fragile si les armatures travaillants à leur limite élastique peuvent équilibrer les sollicitations provoquant la fissuration du béton dans cette section.

Les pièces fragiles sont justifiables par le règlement. La condition suivante est appelée « Condition de non fragilité » et doit être vérifiée comme suit :

$$A_{sB} \geq B.\frac{f_{t28}}{fe}$$

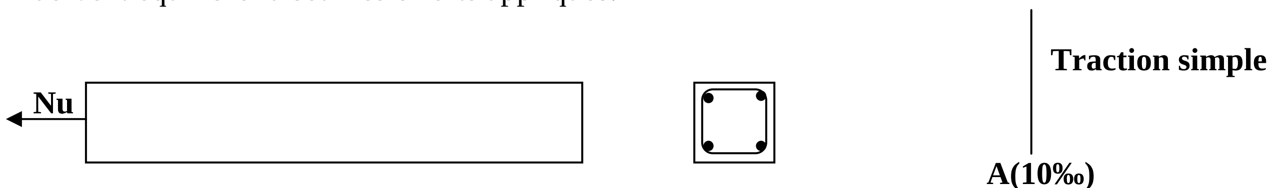
A_{sB} : Armature longitudinale.

B : Section du béton.

Du point de vue résistance B peut être quelconque, mais pour que la pièce ne soit pas fragile, il faut que B vérifie la condition de non fragilité.

Remarque : si B est imposé, il faut que A_s vérifie la condition de non fragilité.

2. E.L.U : Etant donné que le béton est négligé, il résulte que les armatures longitudinales doivent équilibrer à seul les efforts appliqués.



Nu : l'effort de traction à l'E.L.U.

D'ou : $Asu \geq \dfrac{Nu}{\sigma_{st}(10‰)}$ avec $\sigma_{st} = \dfrac{fe}{\gamma_s}$

3. E.L.S : du moment qu'il s'agit de fissuration du béton en traction; nous devons passer par la vérification à l' E.L.S. Ns : l'effort de traction à l'E.L.S.

D'ou : $Ass \geq \dfrac{Ns}{\sigma_{st}}$ avec σ_{st} : en fonction de la fissuration.

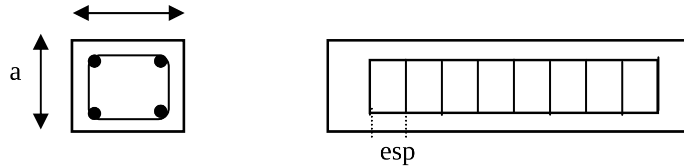
La section des armatures longitudinales sera la suivante :

As = Max (Asu ; Ass ; A_{sB})

4. Armatures transversales : elles non aucun rôle dans la résistance à la traction. Leur diamètre est calculé comme suit :

$\phi_t \geq 0{,}3 \,.\, \phi_L$ avec $\phi_{tmin} = 6$ mm

Espacement : esp ≤ Min (40 cm ; a + 10 cm) avec a : la plus petite dimension.



- Application :

Soit un tirant d'une section carrée (25 × 25) cm² sollicité par un effort de traction à l'E.L.U Nu = 0,45 MN et à l'E.L.S : Ns = 0,34 MN. Les matériaux sont FeE400 et $f_{c28} = 20$ MPa.

La fissuration est préjudiciable.

- Calculez la section des armatures longitudinales ?

- Solution

E.L.U : $Asu \geq \dfrac{Nu}{\sigma_{st}\,(10‰)}$ avec $\sigma_{st} = \dfrac{fe}{\gamma_s} \Leftrightarrow \sigma_{st} = \dfrac{400}{1{,}15} = 347{,}83 MPa$

$$Asu \geq \frac{0{,}45}{347{,}83} \Rightarrow Asu \geq 12{,}94 \text{ cm}^2$$

E.L.S : $Ass \geq \dfrac{Ns}{\sigma_{st}}$ avec $\sigma_{st} \leq \min\left(\dfrac{2}{3}.fe \;;\; 110\sqrt{\eta.f_{t28}}\right)$

$$\Leftrightarrow \sigma_{st} \leq \min\left(\frac{2}{3}.400 \;;\; 110\sqrt{1{,}6.1{,}8}\right) \Leftrightarrow \sigma_{st} = 186{,}67 \text{ MPa}$$

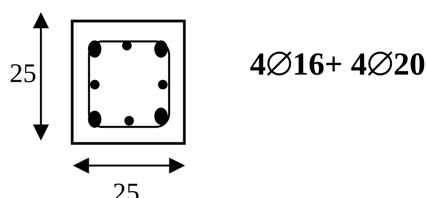
$$Ass \geq \frac{0{,}34}{186{,}67} \Rightarrow Ass \geq 18{,}21 \text{ cm}^2$$

C.N.F: $A_{sB} \geq B.\dfrac{f_{t28}}{fe} \Leftrightarrow A_{sB} \geq (25 \times 25).\dfrac{1{,}8}{400}$

$A_{sB} = 2{,}81$ cm²

La section : **As = Max (Asu ; Ass ; A$_{sB}$) = Max (12,94 ; 18,21 ; 2,81) cm²**

On prend : **As = 18,21 cm² ⇒4∅16+ 4∅20 = 8,04 + 12,57 = 20,61 cm²**



Chapitre VII

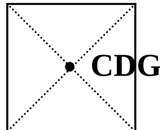
La compression simple

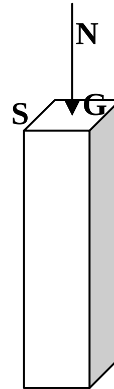
Chapitre VII : La compression simple

I- Compression centrée :

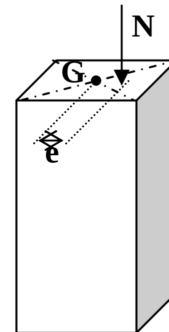
Pour avoir une compression centrée il vérifier les conditions suivantes :

- Il faut que le centre de gravité (CDG) soit centré.





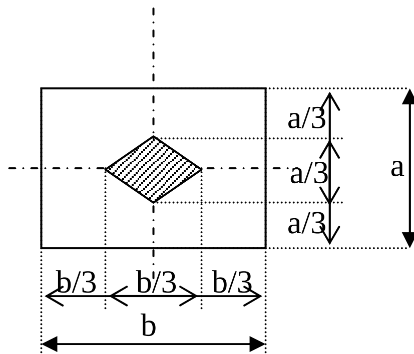
- Il faut que la force soit appliquée dans le noyau central.



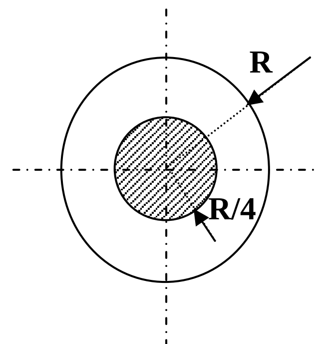
$$e_{max} = \frac{\text{Dimension du noyau central}}{2}$$

- Définition du noyau central :

Rectangulaire :



Circulaire :



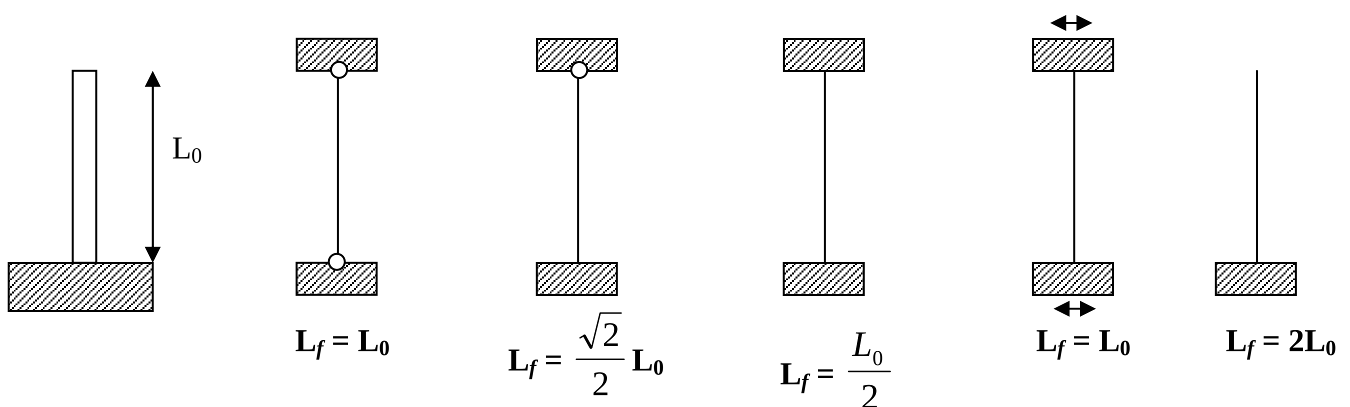
- L'élancement est limité à $\lambda \leq$ **70**.

II- Longueur de flambement et élancement:

1- La longueur de flambement (L_f) : Elle dépend de la longueur de l'élément (L) et du type de la liaison.

a- Evaluation de la longueur de flambement et la longueur libre :

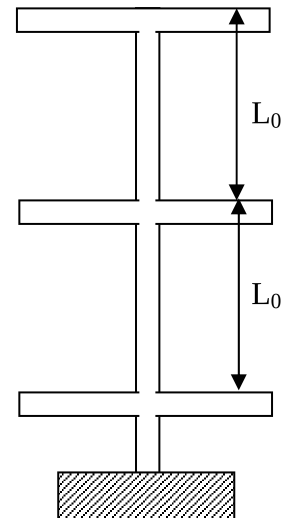
-Cas des poteaux isolés :



-Cas des poteaux dans des bâtiments à étages multiples :

L_f = 0,7 . L_0 : si le poteau est encastré dans un massif de fondation ou bien assemblé à des poutres de plancher ayant au moins la même raideur (E.I) dans le sens de flambement..

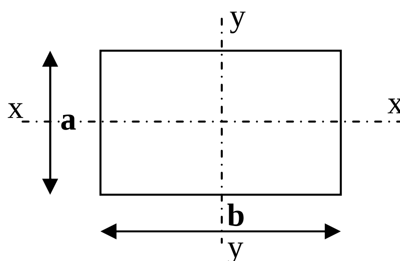
- ou dans le cas de poteaux d'étages multiples.



2- L'élancement de λ : $\lambda = \dfrac{L_f}{i_{\min}}$

- Définition du rayon de giration : $i_{xx} = \sqrt{\dfrac{I_{xx}}{B}}$ avec : B : la section du poteau.

1- Section rectangulaire :

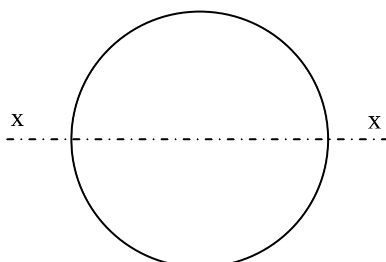


$I_{xx} = \dfrac{b.a^3}{12}$; $I_{yy} = \dfrac{a.b^3}{12}$

$a < b \Rightarrow I_{xx} < I_{yy} \Rightarrow i_{xx} < i_{yy}$

d'où : $i_{\min} = \sqrt{\dfrac{I_{xx}}{B}}$

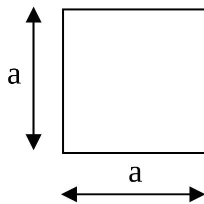
2- Section circulaire :



$I_{xx} = \dfrac{\pi.\mathrm{D}^4}{64}$

$i_x = \sqrt{\dfrac{\dfrac{\pi.D^4}{64}}{\dfrac{\pi.D^2}{4}}} = \sqrt{\dfrac{D^2}{16}}$ d'où : $i_x = \dfrac{D}{4}$

3- Section carrée :



$$i_{\min} = \frac{a}{2.\sqrt{3}}$$

III- Etat limite de service (E.L.S) : Les règles C.B.A n'impose aucune hypothèse.

IV- Etat limite Ultime (E.L.U) :

Soit : Nu : La force extérieure de compression.

B : La surface de l'élément.

F_b : La résistance du béton.

Fe : La résistance de l'acier.

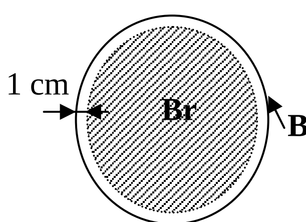
A_{sc} : La section de l'acier.

Nous écrivons l'équilibre entre l'action et la résistance comme suit :

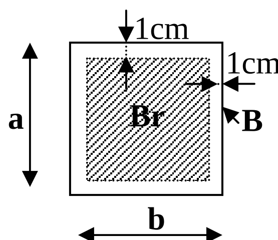
$$Nu \leq B.f_b + A_{sc}.\frac{fe}{\gamma_s}$$

$$\Rightarrow Nu \leq B.\frac{0,85.f_{c28}}{\gamma_b} + A_{sc}.\frac{fe}{\gamma_s}$$

Pour plus de sécurité, on minore la résistance pour un coefficient α. Puis on réduit la section en éliminant 1 cm de chaque bordure. On appelle alors la section réduite.



$$Br = \frac{\pi.(D-0,02)^2}{4}$$



Br = (a – 0,02).(b – 0,02)

La loi s'écrit alors : $Nu \leq \alpha.\left(Br.\frac{f_{c28}}{0,9.\gamma_b} + A_{sc}.\frac{fe}{\gamma_s} \right)$

- Si $\lambda \leq 50$: $\alpha = \frac{0,85}{1+0,2.\left(\frac{\lambda}{35}\right)^2}$

- Si $50 \leq \lambda \leq 70$: $\alpha = 0,6.\left(\frac{50}{\lambda}\right)^2$

Remarque : 1- Si la moitié de la charge est appliquée avant 90 jours α sera divisé par 1,1 ⇒ $\frac{\alpha}{1,1}$.

2- Lorsque la majorité de la charge est appliquée avant 28 jours, on prend la contrainte du béton f_{cj} et en même temps α sera divisé par 1,2 ⇒ $\frac{\alpha}{1,2}$.

V - Détermination des armatures :

1- Armatures longitudinales :

$$Nu \leq \alpha.\left(Br.\frac{f_{c28}}{0,9.\gamma_b} + A_{sc}.\frac{fe}{\gamma_s}\right)$$

d'où : $$A_{sc} \geq \left(\frac{Nu}{\alpha} - \frac{Br.f_{c28}}{0,9.\gamma_b}\right).\frac{\gamma_s}{fe}$$

- Si λ ≤ 35 : A_{sc} représente l'aire de toute les armatures longitudinales à disposer sur tout le périmètre de la section considérée.
- Si λ > 35 : A_{sc} représente l'aire des armatures qui augmente efficacement la rigidité dans le sens ou le moment d'inertie est le plus faible.

2- Pourcentage d'armatures minimum :

Le C.B.A exige : $\mathbf{A_{scmin}}$ **= 0,1 %** de la section du béton avec $\mathbf{\varnothing_{min}}$ **= 12 mm**.

Le R.P.A exige : $\mathbf{A_{scmin}}$ **= 0,7 % . B** →Zone I

$\mathbf{A_{scmin}}$ **= 0,8 % . B** →Zone IIa

$\mathbf{A_{scmin}}$ **= 0,9 % . B** →Zones IIb et III

3- Pourcentage d'armatures maximum :

Le C.B.A et le R.P.A exigent :

$\mathbf{A_{scmax}}$ **= 4 %** de la section du béton en dehors de la zone de recouvrement..

$\mathbf{A_{scmax}}$ **= 6 %** de la section du béton dans la zone de recouvrement..

Alors pour les armatures longitudinales nous avons trois cas :

1- $A_{min} < A_{sc\ calculée} < A_{max}$ ⇒ On ferraille avec A_{sc} calculée.

2- $A_{sc\ calculée} < A_{min}$ ⇒ On ferraille avec A_{min} avec $\varnothing_{min}$ = 12 mm.

3- $A_{sc\ calculée} > A_{max}$ ⇒ On augmente la section du béton B et on recalcule un nouveau A_{sc}.

4- Armatures transversales : elles n'ont aucun rôle de résistance, le rôle principale c'est d'empêcher le flambement des armatures longitudinales.

Le diamètre sera : $\phi_t = \dfrac{\phi_l}{3}$

L'espacement entre deux cadre : esp = Min{40cm ; a+10cm ; 15.$\varnothing_{lmin}$}….C.B.A

Dans la zone nodale :

esp ≤ Min{15cm ; 10$\varnothing_{lmin}$} → Zones I et IIa…… R.P.A

esp ≤ 10cm → Zones IIb et III……R.P.A

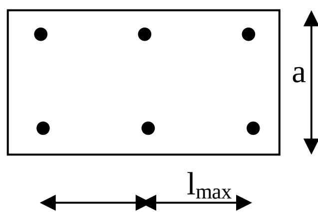
Dans la zone courante :

esp ≤ 15$\varnothing_{lmin}$ → Zones I et IIa…… R.P.A

esp ≤ {b/2 ; a/2 ; 10$\varnothing_{lmin}$} → Zones IIb et III……R.P.A

5- Dispositions constructives :

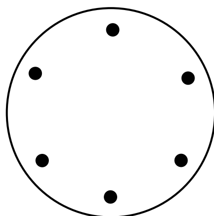
-Section rectangulaire :



l_{max} < Min (40 ; a+10) cm ⇒ C.B.A

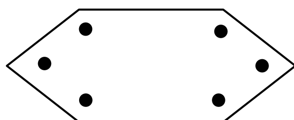
$$l_{max} < \begin{cases} 25cm \text{ en zones I et IIa} \\ 20cm \text{ en zones IIb et III} \end{cases}$$

-Section rectangulaire :



un minimum de 6 barres de ∅12.

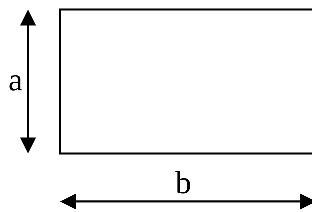
-Section polygonale :



une barre à chaque sommet

VI – Prédimensionnement des poteaux :

Pour une section rectangulaire : $0 < \lambda < 70$ on prend : $\lambda = 35$.



$$\lambda = \frac{L_f}{i_{\min}} = \frac{L_f}{a}.2\sqrt{3}$$

d'où $a = \frac{L_f}{\lambda}.2\sqrt{3}$

Le minimum soit $A_{sc} > 0$.

$$\Rightarrow A_{sc} = \left(\frac{Nu}{\alpha} - \frac{Br\,.\,f_{c28}}{0,9.\gamma_b}\right).\frac{\gamma_s}{fe} \succ 0 \quad \text{avec} \quad Br = (a - 0,02)\,.\,(b - 0,02)$$

$$\Rightarrow A_{sc} = \left(\frac{Nu}{\alpha} - \frac{(a-0,02).(b-0,02).\,f_{c28}}{0,9.\gamma_b}\right).\frac{\gamma_s}{fe} \succ 0$$

$$\Rightarrow (a - 0,02).(b - 0,02) \prec \frac{Nu}{\alpha}.\frac{0,9\,.\,\gamma_b}{f_{c28}} \quad \Rightarrow (b - 0,02) \prec \frac{Nu}{\alpha}.\frac{0,9\,.\,\gamma_b}{f_{c28}.(a - 0,02)}$$

$$\Rightarrow \quad b \prec \frac{Nu}{\alpha}.\frac{0,9\,.\,\gamma_b}{f_{c28}.(a - 0,02)} + 0,02$$

Pour le prédimensionnement le R.P.A2003 exige :

Pour un poteau rectangulaire :

Min (a , b) ≥ 25 cm en zones I et IIa.

Min (a , b) ≥ 30 cm en zones IIb et III.

Min (a , b) ≥ h_e / 20 h_e : la hauteur entre nu d'étage.

$$\frac{1}{4} \leq \frac{b}{a} \leq 4$$

Pour un poteau circulaire :

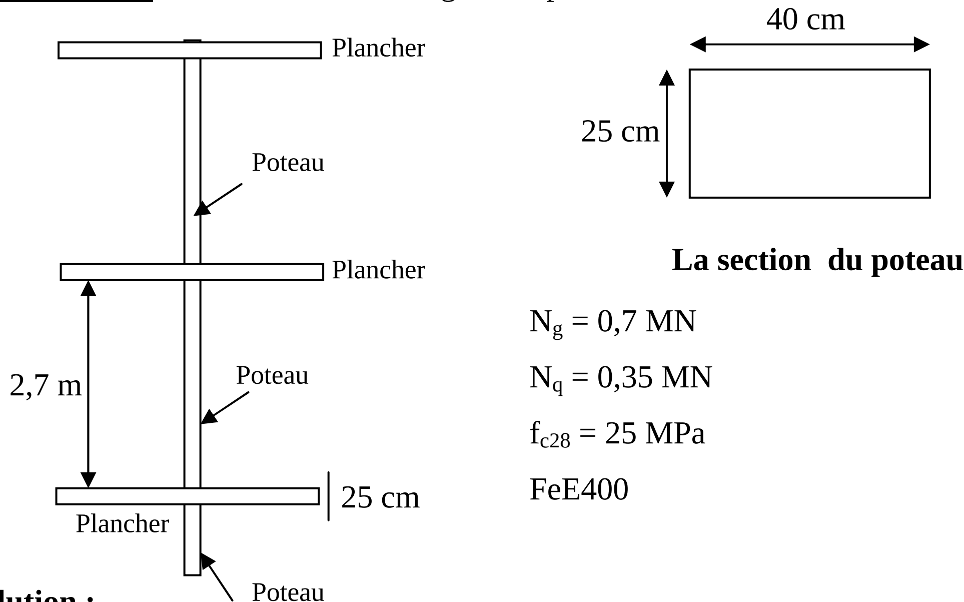
D ≥ 25 cm en zones I.

D ≥ 30 cm en zones IIa.

D ≥ 35 cm en zones IIb et III.

D ≥ h_e / 15 h_e : la hauteur entre nu d'étage.

-Application : Soit un bâtiment à étage multiple



La section du poteau

N_g = 0,7 MN

N_q = 0,35 MN

f_{c28} = 25 MPa

FeE400

Solution :

$N_u = 1{,}35 \,.\, N_g + 1{,}5 \,.\, N_q \;=\; 1{,}5 \,.\, 0{,}7 + 1{,}5 \,.\, 0{,}35 = 1{,}47$ MN.

$L_0 = 2{,}7 + 0{,}25 = 2{,}95$ m.

La longueur de flambement : $L_f = 0{,}7 \,.\, L_0 = 0{,}7 \,.\, 2{,}95 = 2{,}065$ m.

Le rayon de giration : $i_{\min} = \dfrac{a}{2\sqrt{3}} = \dfrac{25}{2\sqrt{3}} = 7{,}22$ cm

L'élancement : $\lambda = \dfrac{L_f}{i_{\min}} = \dfrac{206{,}5}{7{,}22} = 28{,}31$

$$\lambda < 50 \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{0{,}85}{1 + 0{,}2.\left(\dfrac{\lambda}{35}\right)^2} = \frac{0{,}85}{1 + 0{,}2.\left(\dfrac{28{,}31}{35}\right)^2} = 0{,}75$$

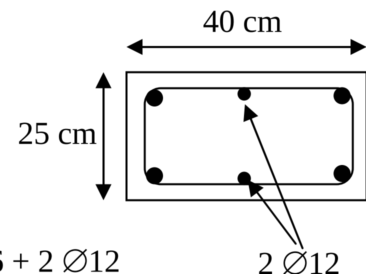
La section réduite: $Br = (40 - 2) \times (25 - 2) = 874$ cm².

La section d'armature : $A_{sc} \geq \left(\dfrac{Nu}{\alpha} - \dfrac{Br.f_{c28}}{0{,}9.\gamma_b}\right).\dfrac{\gamma_s}{fe} = \left(\dfrac{1{,}47}{0{,}75} - \dfrac{0{,}0874.25}{0{,}9.1{,}5}\right).\dfrac{1{,}15}{400}$

$A_{sc} \geq 9{,}81$ cm².

$A_{scmin} = 0{,}1\% \,.\, B = 0{,}1 \,.\, \dfrac{25 \times 40}{100} = 1$ cm².

$A_{scmax} = 4\% \,.\, B = 4 \,.\, \dfrac{25 \times 40}{100} = 40$ cm².



D'où : $A_{scmin} \leq A_{sc} \leq A_{scmax}$ et le choix peut être : 4 ∅16 + 2 ∅12

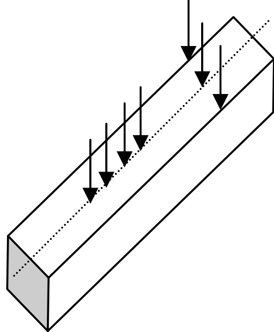
Chapitre VIII

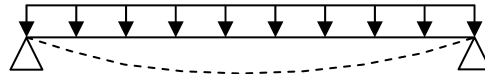
La flexion simple

Chapitre VIII : La flexion simple

I – Définition :

Une poutre sera sollicitée en flexion simple lorsqu'elle sera soumise à l'action de force disposée symétriquement par rapport au plan moyen.

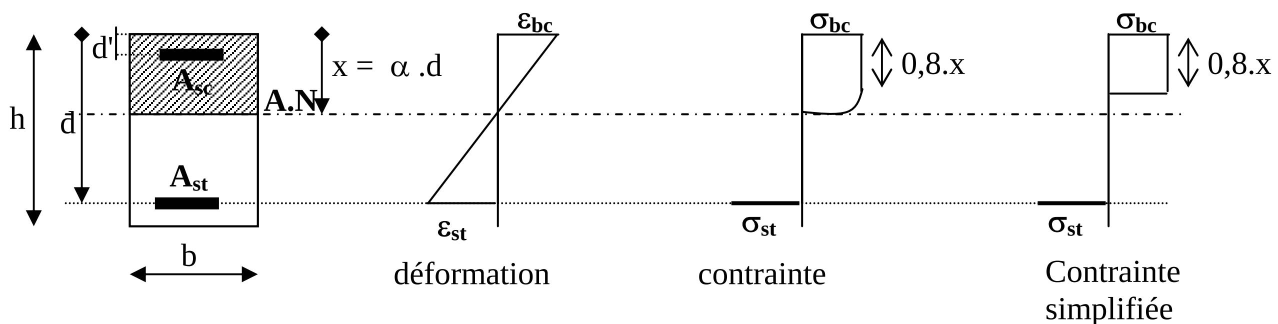


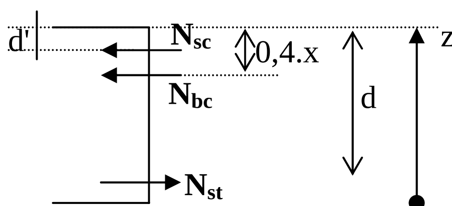


La réduction de cette force au centre de gravité de la section se décompose en moment fléchissant et un effort tranchant.

II- Etat limite ultime de résistance pour une section rectangulaire :

1- Equilibre d'une section fléchie :





Les efforts s'écriront : $N_{st} = A_{st} \cdot \sigma_{st}$

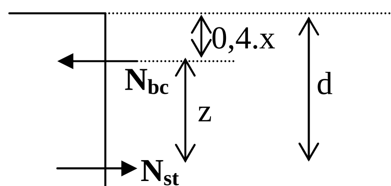
$N_{sc} = A_{sc} \cdot \sigma_{sc}$

$N_{bc} = 0{,}8 \cdot x \cdot b \cdot \sigma_{bc}$

L'équilibre de la section :

$\Sigma F_x = 0$ et $\Sigma M = M_u$.

2 – Section à armatures simple :



L'équilibre des efforts : $N_{st} = N_{bc}$

$A_{st} \cdot \sigma_{st} = 0{,}8 \cdot x \cdot b \cdot \sigma_{bc}$

L'équilibre des moments : $M_u = M_{bc} \cdot z$

Avec $z = d - 0{,}4 \cdot x$ et $x = \alpha \cdot d$

$\Rightarrow z = d \cdot (1 - 0{,}4 \cdot \alpha)$

$\Rightarrow$ $M_u = 0{,}8 \, . \, \alpha \, . \, d \, . \, b \, . \, \sigma_{bc} \, . \, d \, . \, (1 - 0{,}4. \, \alpha)$

$= 0{,}8 \, . \, \alpha \, . \, d^2 \, . \, b \, . \, \sigma_{bc} \, . \, (1 - 0{,}4. \, \alpha)$

$\Rightarrow$ $M_u = N_{st} \, . \, z = A_{st} \, . \, d \, . \, (1 - 0{,}4. \, \alpha)$

- Le moment réduit "μ_u" : $M_u = 0{,}8 \, . \, \alpha \, . \, d^2 \, . \, b \, . \, \sigma_{bc} \, . \, (1 - 0{,}4. \, \alpha)$

$$\frac{M_u}{b.d^2.\sigma_{bc}} = 0{,}8 \, . \, \alpha \, . \, (1 - 0{,}4\,\alpha)$$

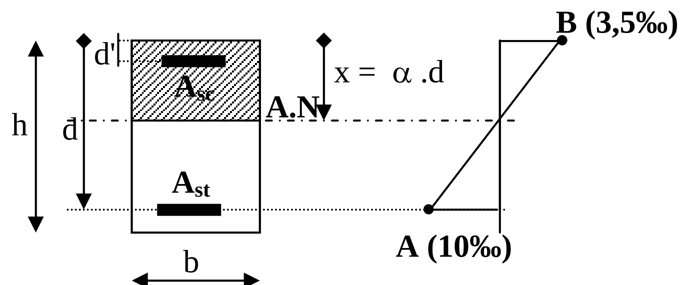
On appellera cette quantité le moment réduit $\mu_\mu = \dfrac{M_u}{b.d^2.\sigma_{bc}} = 0{,}8 \, . \, \alpha \, . \, (1 - 0{,}4\,\alpha)$

Donc $\mu_\mu = 0{,}8 \, . \, \alpha \, . \, (1 - 0{,}4\,\alpha)$

D'où : $\alpha = 1{,}25\left(1 - \sqrt{1 - 2\mu_\mu}\right)$

- Le moment de référence d'une section : $\mu_\mu = \dfrac{M_u}{b.d^2.\sigma_{bc}}$

La règle des 3 pivots se fixe comme objectif d'utiliser les matériaux à leurs maximum. Le diagramme de déformation correspondant sera le diagramme qui passe par les pivots A et B.



Le diagramme idéal

$$\alpha = \frac{\varepsilon_{bc}}{\varepsilon_{bc} + \varepsilon_{st}} = \frac{3{,}5}{3{,}5 + 10} = 0{,}259$$

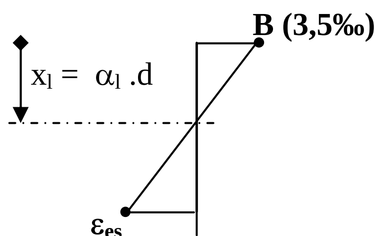
d'où : $\mu_{AB} = 0{,}186$

Le moment réduit μ_{AB} correspond à un moment fléchissant appelé moment de référence :

$$\mathbf{M_{AB} = \mu_{AB} \, . \, b \, . \, d^2 \, . \, \sigma_{bc}}$$

- Le moment résistant M_R :

On désigne par un moment résistant le moment obtenu lorsque l'allongement des armatures est égal à l'allongement élastique (ε_{es}).



Le résistant s'écrit : $\mathbf{M_R = \mu_l \, . \, b \, . \, d^2 \, . \, \sigma_{bc}}$

Avec : $\mu_l = 0{,}8 \, . \, \alpha_l \, . \, (1 - 0{,}4\,\alpha_l)$

$$\alpha_l = \frac{\varepsilon_{bc}}{\varepsilon_{bc} + \varepsilon_{es}} = \frac{3{,}5}{3{,}5 + \varepsilon_{es}}$$

Nuance	**FeE215**		**FeE235**		**FeE400**		**FeE500**	
	$\gamma_s = 1$	$\gamma_s = 1,15$	$\gamma_s = 1$	$\gamma_s = 1,15$	$\gamma_s = 1$	$\gamma_s = 1,15$	$\gamma_s = 1$	$\gamma_s = 1,15$
fe/γ_s	215	187	235	204	400	348	500	435
ε_{es} (‰)	1,075	0,935	1,175	1,02	2,00	1,74	2,5	2,175
α_l	0,765	0,789	0,749	0,774	0,636	0,668	0,583	0,617
μ_l	0,425	0,432	0,420	0,427	0,379	0,392	0,358	0,372

Si $\alpha > \alpha_l \Leftrightarrow \varepsilon < \varepsilon_{es}$: alors les aciers ne travail pas suffisamment.

Les domaines définis par la règle des 3 pivots sont :

Domaine 1 $\rightarrow$ $\mu \leq 0,186$ $\Leftrightarrow$ $0 < \alpha \leq 0,259$

Domaine 2-a $\rightarrow$ $0,186 < \mu \leq \mu_l$ $\Leftrightarrow$ $0,259 < \alpha \leq \alpha_l$

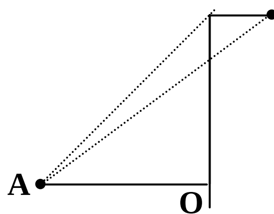
Domaine 2-b $\rightarrow$ $\mu_l < \mu \leq 0,48$ $\Leftrightarrow$ $\alpha_l < \alpha \leq 1$

Donc l'état limite ultime peut être atteint de deux manières :

- Par écoulement plastique des aciers.
- Par écrasement du béton.

- Etat limite ultime par écoulement plastique des aciers :

Pivot A : Cette état limite sera caractérisée par les déformations suivantes :



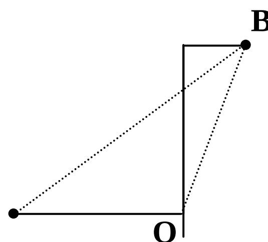
$\varepsilon_s = 10$ ‰

$\varepsilon_{bc} = 0$ et 3,5 ‰

$0 < \alpha \leq 0,259$

- Etat limite ultime par écrasement du béton :

Pivot B : Cette état limite sera caractérisée par les déformations suivantes :



$\varepsilon_{bc} = 3,5$ ‰

$\varepsilon_s = 0$ et 10 ‰

$0,259 < \alpha \leq 1$

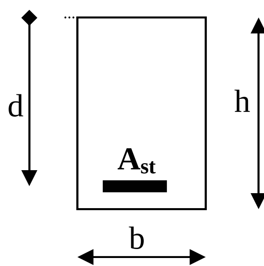
Le mode d'obtention de l'état limite ultime sera déterminé en comparant α et 0,259; la valeur qui correspond à l'état limite atteint simultanément par l'écoulement de l'acier et l'écrasement du béton.

- Position particulière de l'axe neutre :

- si $\alpha < 0{,}167 \Rightarrow$ le béton travail mal et nous avons alors une section surdimensionnée.
- si $0{,}167 < \alpha < \alpha_l \Rightarrow$ le domine le plus économique du béton.

III- Détermination des armatures pour une section donnée :

a- Section à armatures simple :



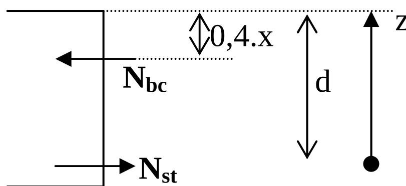
$$\mu_\mu = \frac{M_u}{b.d^2.\sigma_{bc}}$$

si "d" est inconnu; on prendra : d = 0,9 . h

$\mu_u \le \mu_l$ (μ_l : tirée du tableau précédent)

$$\alpha = 1{,}25\left(1 - \sqrt{1 - 2\mu_\mu}\right)$$

On choisi comme origine de l'axe "z" le point d'application N_{bc} :



$M_u = N_{st} . z + N_{bc} . 0$

$M_u = A_{st} . \sigma_{st} . z$

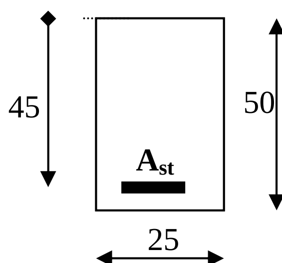
$Z = d - 0{,}4\,x = d\,(1 - 0{,}4\,.\alpha)$

$$A_{st} = \frac{M_u}{z.\sigma_{st}}$$

-Application : Soit une section (25 × 50) sollicitée par un moment de flexion M_u = 0,153 MN.m, avec f_{c28} = 25 MPa et FeE400.

1°- Calculez la section du ferraillage à l'E.L.U ?

- Solution



On prendra : d = 0,9 . h = 0,9 . 50 = 45 cm

$$\sigma_{bc} = \frac{0{,}85.f_{c28}}{\gamma_b} = \frac{0{,}85.25}{1{,}5} = 14{,}47 \text{ MPa}$$

$$\mu_\mu = \frac{M_u}{b.d^2.\sigma_{bc}} \Leftrightarrow \mu_\mu = \frac{0{,}153}{0{,}25.(0{,}45)^2.14{,}47} = 0{,}213$$

$\mu_u \le \mu_l = 0{,}392$

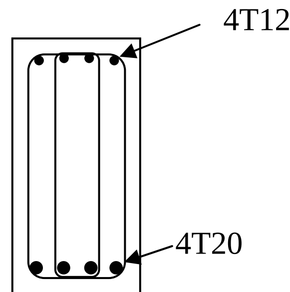
La section est à armatures simple : $\alpha = 1{,}25\left(1 - \sqrt{1 - 2\mu_\mu}\right) = 1{,}25\left(1 - \sqrt{1 - 2.\ 0{,}213}\right) = 0{,}303$

$$z = d.\ (1 - 0{,}4\ .\alpha) = 0{,}45\ .\ (1 - 0{,}4\ .0{,}303) = 0{,}3954\ m$$

$$A_{st} = \frac{M_u}{z.\sigma_{st}} = \frac{0{,}153}{0{,}3954.\ 348} = 0{,}001112\ m^2$$

$$A_{st} = 11{,}12\ cm^2$$

Le choix peut être : 4T20 = 12,57 cm².



b- Section à armatures double :

$\mu_u \le \mu_l \Rightarrow$ Section à simple armatures (S.S.A)

$\mu_u > \mu_l \Rightarrow$ Section à double armatures (S.D.A)

De la règle des 3 pivots nous savons que, quand le moment réduit "μ_u" dépasse le moment réduit limite "μ_l", le travail des armatures inférieures est très faible, l'acier est donc mal utilisé. Plusieurs solutions sont possibles :

- Augmenter b et h.
- Utilisation d'un béton qui a une grande résistance.
- Ajouter les armatures comprimées.
- Laisser la section et la calculer avec comme ferraillée armatures simple.

- Moment résistant et moment résiduel :

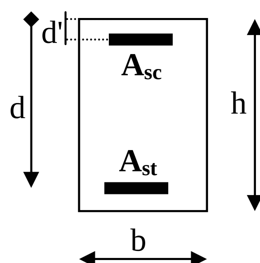
Le moment résistant du béton sera le moment qui peut équilibrer : $\mathbf{M_R = \mu_l\ .\ b\ .\ d^2\ .\ \sigma_{bc}}$

Le moment résiduel sera la différence entre le moment sollicitant et le moment résistant :

$$\mathbf{M_r = M_u - M_R}$$

- Détermination des armatures :

On choisi comme origine de l'axe "z" le centre de gravité des armatures inférieures A_{st} :

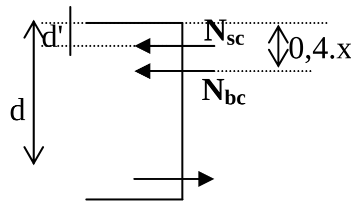


$$M_u = N_{st}\ .\ z(=0) + N_{bc}\ .\ z_{bc} + N_{sc}\ .\ z_{sc}$$

$$M_u = 0{,}8\ .\ \alpha_l\ .\ d^2\ .\ b\ .\ \sigma_{bc}\ .\ (1 - 0{,}4.\ \alpha_l) + A_{sc}\ .\ \sigma_{sc}\ .\ (d - d')$$

$$M_u = \mu_l\ .\ b\ .\ d^2\ .\ \sigma_{bc} + A_{sc}\ .\ \sigma_{sc}\ .\ (d - d')$$

$$A_{sc} = \frac{M_u - M_R}{\sigma_{sc}.(d - d')}$$



$\Sigma N = 0.$

$N_{st} - N_{sc} - N_{bc} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{st} = N_{sc} + N_{bc}$

$A_{st} \,.\, \sigma_{st} = 0,8 \,.\, \alpha_l \,.\, d \,.\, b \,.\, \sigma_{bc} + A_{sc} \,.\, \sigma_{sc}$

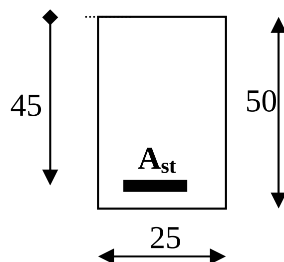
$$A_{st}.\sigma_{st} = \frac{M_r}{d-d'} + \frac{M_R}{d(1-0,4.\alpha_l)}$$

$$A_{st} = \frac{1}{\sigma_{st}}\left(\frac{M_r}{(d-d')} + \frac{M_R}{d(1-0,4.\alpha_l)}\right)$$

-Application : Soit une section (25 × 50) sollicitée par un moment de flexion $M_u = 0,315$ MN.m, avec $f_{c28} = 25$ MPa et FeE400 et d' = 5 cm..

1°- Calculez la section du ferraillage à l'E.L.U ?

- Solution



$$\mu_\mu = \frac{M_u}{b.d^2.\sigma_{bc}} \Leftrightarrow \mu_\mu = \frac{0,315}{0,25\,.(0,45)^2.14,47} = 0,439$$

$\mu_u \geq \mu_l = 0,392$ La section est à armatures doubles.

$M_R = \mu_l \,.\, b \,.\, d^2 \,.\, \sigma_{bc} = 0,392 \,.\, 0,25 \,.\, (0,45)^2 \,.\, 14,47 = 0,281$ MN.m

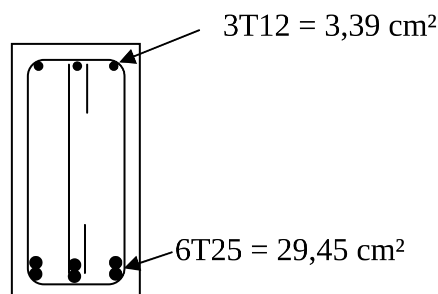
$M_r = M_u - M_R = 0,315 - 0,281 = 0,034$ MN.m.

$$A_{sc} = \frac{M_u - M_R}{\sigma_{sc}.(d-d')} = \frac{0,034}{348.(0,45-0,05)} = 2,44 \text{ cm}^2$$

$$A_{st} = \frac{1}{\sigma_{st}}\left(\frac{M_r}{(d-d')} + \frac{M_R}{d(1-0,4.\alpha_l)}\right)$$

$$= \frac{1}{348}\left(\frac{0,034}{(0,45-0,05)} + \frac{0,281}{0,45.(1-0,4.\,0,668)}\right) = 26,93 \ cm^2$$

Le choix peut être : 6T25 = 29,45 cm²



IV- Etat limite de service :

Il est nécessaire de vérifier à l' E .L.S que la compression du béton reste admissible ainsi que la traction dans les armatures en fonction de la préjudiciabilité de la fissuration :

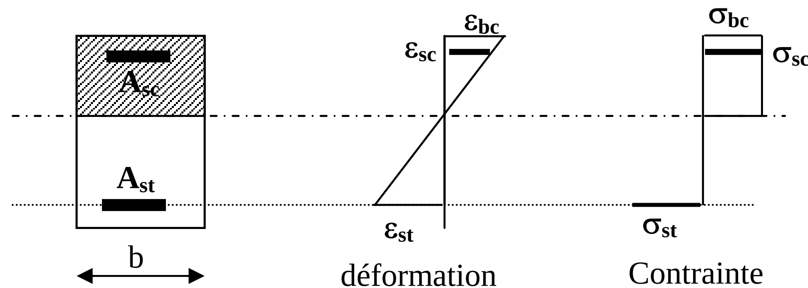
$$\sigma_{bc} = 0{,}6 \cdot fc28$$

la fissuration préjudiciable $\quad \sigma_{st} \leq \min\left(\frac{2}{3}.fe \;;\; 110\sqrt{\eta.f_{t28}}\right)$

la fissuration très préjudiciable $\quad \sigma_{st} \leq \min\left(\frac{1}{2}.fe \;;\; 90\sqrt{\eta.f_{t28}}\right)$

1- Détermination des contraintes :

a- détermination de l'axe neutre :



Par l'équilibre des moments statiques :

$$b \cdot x \cdot \frac{x}{2} + n \cdot A_{sc} \cdot (x - d') - n \cdot A_{st} \cdot (d - x) = 0$$

b- détermination des contraintes :

Sous l'action du moment, la section se déforme jusqu'à obtenir un état de contrainte qui équilibre le moment :

$$\Sigma M_i = M_S \text{ (moment de service)}$$

Nous avons : $\quad M_b + M_{ASC} + M_{AST} = M_S$

$$I = I_b + n \cdot I_{st} + n \cdot I_{sc}$$

$$I_b = \frac{b.x^3}{3} \quad ; \quad I_{sc} = A_{sc} \cdot (x - d')^2 \quad ; \quad I_{st} = A_{st} \cdot (d - x)^2$$

Alors les contraintes sont : $\quad \sigma_{bc} = \frac{M_S.x}{I} \quad$ et $\quad \sigma_{st} = \frac{n.M_S.(d - x)}{I}$

Les vérifications sont : $\quad \left.\begin{matrix} \sigma_{bc} \prec \overline{\sigma_{bc}} \\ \sigma_{st} \prec \overline{\sigma_{st}} \end{matrix}\right\} E.L.S \quad$ est vérifié

Si l'une ou les deux conditions ne sont pas vérifiée alors l'E.L.S n'est pas vérifié.

-Application : Vérifiez l'état limite service pour une section (25 × 50) sollicitée par un moment de flexion à l'E.L.S M_s = 0,2 MN.m ? avec f_{c28} = 25 MPa et FeE400 ; d' = 5 cm ; A_{st} = 6T25 = 29,45 cm² ; A_{sc} = 3T12 = 3,39 cm²

- Solution

- La vérification à l'E.L.S :

La position de l'axe neutre :

$$b \cdot x \cdot \frac{x}{2} + n \cdot A_{sc} \cdot (x - d') - n \cdot A_{st} \cdot (d - x) = 0$$

$$12{,}5 \cdot x^2 + 15 \cdot (3{,}39) \cdot (x - 5) - 15 \cdot 29{,}45 \cdot (45 - x) = 0$$

$$12{,}5\ x^2 + 492{,}6 \cdot x - 201331 = 0$$

$$x = 25 \text{ cm.}$$

Le moment d'inertie :

$$I = \frac{b.x^3}{3} + n .A_{sc} \cdot (x - d')^2 + n \cdot A_{st} \cdot (d - x)^2$$

$$= \frac{25.(25)^3}{3} + 15 \cdot 3{,}39\,(25 - 5)^2 + 15 \cdot 29{,}45 \cdot (45 - 25)^2 = 0{,}0033 \text{ m}^4$$

Les contraintes sont : $\sigma_{bc} = \frac{M_S .x}{I} = \frac{0{,}2 . 0{,}25}{0{,}0033} = 15{,}15 \text{ MPa} > \overline{\sigma_{bc}} = 0{,}6 \ .\ 25 = 15 \text{ MPa}$

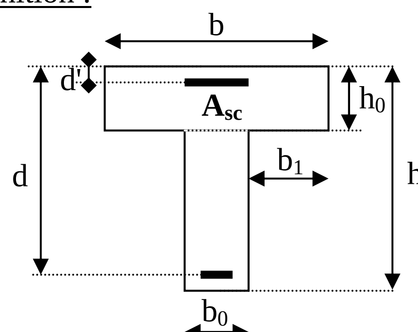
et $\sigma_{st} = \frac{n.M_S .(d - x)}{I} = \frac{15. 0{,}2 . (0{,}45 - 0{,}25)}{0{,}0033} = 182 \text{ MPa}$

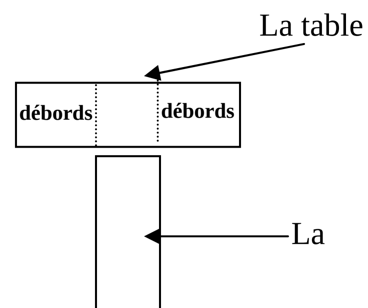
- la fissuration préjudiciable : $\sigma_{st} = 183\ MPa \leq \min\left(\frac{2}{3}.fe\ ;\ 110\sqrt{\eta . f_{t28}}\right) = 201$ MPa

Alors l'E.L.S n'est pas vérifié.

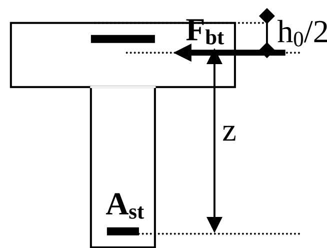
V- Etat limite ultime pour une section en " Té " :

1 – définition :



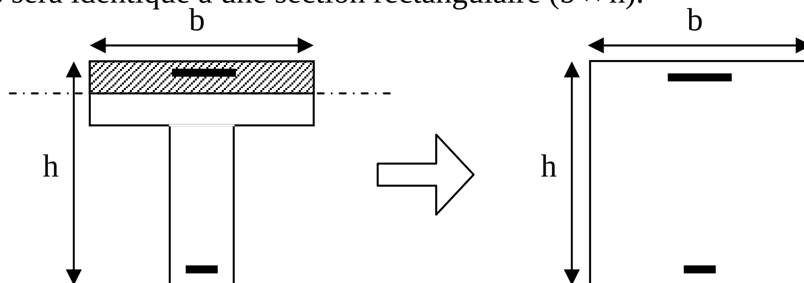


2 – détermination du ferraillage :

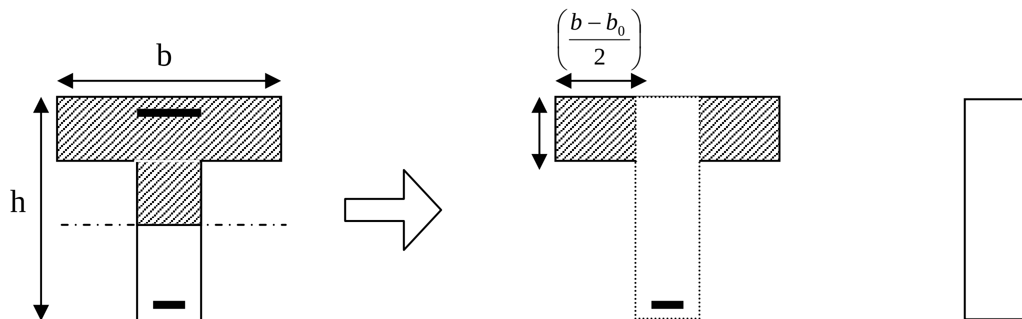


$$\left.\begin{array}{l} N = b.h_0.\sigma_{bc} \\ z = d - \dfrac{h_0}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow M_t = b.h_0.\sigma_{bc}.\left(d - \frac{h_0}{2}\right)$$

1[er] cas : Si $M_u \leq M_t \Rightarrow$ La table n'est pas entièrement comprimée. La détermination des armatures sera identique à une section rectangulaire (b × h).



2[ème] cas : Si $M_u \geq M_t \Rightarrow$ La table est entièrement comprimée. Le calcul de ferraillage sera en décomposant la section en Té de la manière suivante :



-Moment équilibré par les débords :

$$M_d = 2.\left(\frac{b - b_0}{2}\right).h_0.\sigma_{bc}.\left(d - \frac{h_0}{2}\right)$$

$$M_d = (b - b_0).h_0.\sigma_{bc}.\left(d - \frac{h_0}{2}\right)$$

$$M_d = \left(\frac{b - b_0}{b}\right).M_t$$

$$A_{st} = \frac{M_d}{\sigma_{st}.\left(d - \dfrac{h_0}{2}\right)}$$

-Moment équilibré par la section b_0 ; h_0 : le moment résiduel sera $M_u - M_d$

$$\mu_\mu = \frac{M_u - M_d}{b_0 . d^2 . \sigma_{bc}}$$

Si $\mu_u \leq \mu_l$: $\alpha = 1{,}25\left(1 - \sqrt{1 - 2\mu_\mu}\right)$

z = d (1 – 0,4 .α)

$$A_{st2} = \frac{M_u - M_d}{z . \sigma_{st}}$$

Si $\mu_u > \mu_l$:

On prend : $\boldsymbol{x_l = \alpha_l . d}$

- Si 0,8. $x_l \geq h_0$:

$\mathbf{M_R = \mu_l . b_0 . d^2 . \sigma_{bc}}$ et $\boldsymbol{z_l = d\,(1 - 0{,}4 . \alpha_l)}$

$$A_{st} = \frac{1}{\sigma_{st}}\left(\frac{M_u - M_d - M_R}{(d - d')} + \frac{M_R}{z_l}\right)$$

$$A_{sc} = \frac{M_u - M_d - M_R}{\sigma_{sc} . (d - d')}$$

- Si 0,8. $x_l < h_0$: la section sera considérée comme une section rectangulaire (b × h) soumise à un moment M_u.

VI- Etat limite de service :

a- détermination de l'axe neutre :

Par l'équilibre des moments statiques :

$$b . x . \frac{x}{2} + \left(\frac{b - b_0}{2}\right) . (x - h_0)^2 + n . A_{sc} . (x - d') - n . A_{st} . (d - x) = 0$$

b- détermination des contraintes :

Les moments d'inerties s'écriront :

- Si l'axe neutre est dans la table : $I_b = \frac{b . x^3}{3}$

- Si l'axe neutre est dans la nervure : $I_b = \frac{b . x^3}{3} - \left(\frac{b - b_0}{3}\right) . (x - h_0)^3$

et $I_{sc} = A_{sc} . (x - d')^2$; $I_{st} = A_{st} . (d - x)^2$

$\Sigma M_i = M_S$ (moment de service)

Nous avons : $M_b + M_{ASC} + M_{AST} = M_S$

$$I = I_b + n \, . \, I_{st} + n \, . \, I_{sc}$$

Alors les contraintes sont : $\sigma_{bc} = \dfrac{M_S . x}{I}$ et $\sigma_{st} = \dfrac{n.M_S .(d - x)}{I}$

Les vérifications sont : $\left.\begin{array}{l}\sigma_{bc} \prec \overline{\sigma_{bc}} \\ \sigma_{st} \prec \overline{\sigma_{st}}\end{array}\right\} E.L.S$ est vérifié

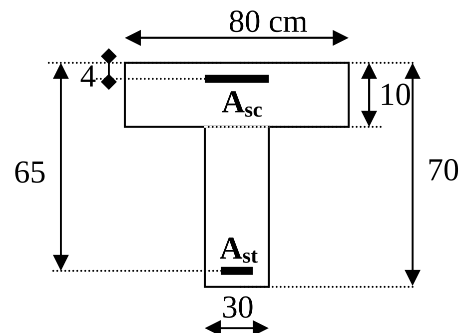
Si l'une ou les deux conditions ne sont pas vérifiée alors l'E.L.S n'est pas vérifié.

-Application : Soit une section en "Té" sollicitée par un moment de flexion à l'E.L.U : M_u = 0,8 MN.m et à l'E.L.S M_s = 0,5 MN.

Si : f_{c28} = 20 MPa ; FeE400 ; d = 65 cm ; d' = 4 cm.

1°- Calculez la section du ferraillage à l'E.L.U ?

2°-Vérifiez les contraintes à l'E.L.S?



- Solution

1°- E.L.U :

Le moment de la table :

$$M_t = b.h_0.\sigma_{bc}.\left(d - \frac{h_0}{2}\right) = 0,80 \, . \, 0,10 \, .11,33.\left(0,65 - \frac{0,10}{2}\right) = 0,544 \text{ MN.m}$$

M_u = 0,8 MN.m > M_t = 0,544 MN.m ⇒ La table est entièrement comprimée. Le calcul de ferraillage sera en décomposant la section en Té de la manière suivante :

-Moment équilibré par les débords :

$$M_d = \left(\frac{b - b_0}{b}\right).M_t = \left(\frac{80 - 30}{80}\right).0,544 = 0,34 \text{ MN.m}$$

$$A_{st} = \frac{M_d}{\sigma_{st}.\left(d - \frac{h_0}{2}\right)} = A_{st} = \frac{0,34}{348.\left(0,65 - \frac{0,10}{2}\right)} = 16,28 \ cm^2$$

-Moment équilibré par la section b_0 ; h_0 :

$$\mu_\mu = \frac{M_u - M_d}{b_0.d^2.\sigma_{bc}} = \frac{0,80 - 0,34}{0,3 \ .(0,65)^2 \ .11,33} = 0,32$$

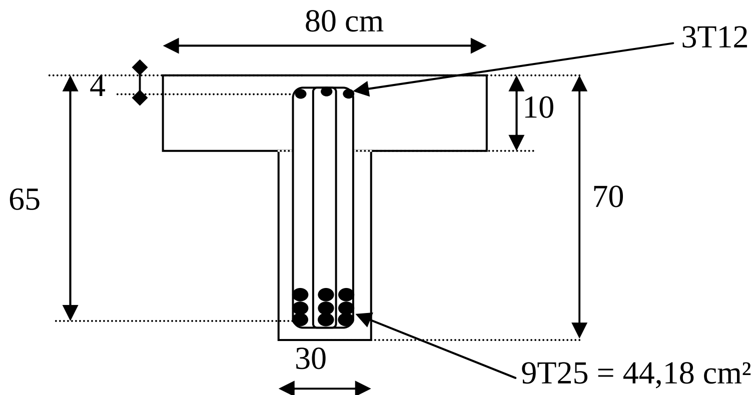
$\mu_u = 0,32 \leq \mu_l = 0,392$: $\alpha = 1,25\left(1 - \sqrt{1 - 2\mu_\mu}\right) = 1,25\left(1 - \sqrt{1 - 2 \ . \ 0,32}\right) = 0,5$

z = d (1 – 0,4 .α) = 65 . (1- 0,4 . 0,5) = 52 cm.

$$A_{st2} = \frac{M_u - M_d}{z.\sigma_{st}} = \frac{0,8 - 0,34}{0,52\ .11,33} = 25,43\,\text{cm}^2$$

$A_{st} = A_{st1} + A_{st2}$ = 16,28 + 25,43 = 41,71 cm²

Soit un choix de : 9T25 = 44,18 cm².



2°-E.L.S : M_s = 0,5 MN.m

a- détermination de l'axe neutre :

$$b\,.\,x\,.\,\frac{x}{2} + \left(\frac{b - b_0}{2}\right).(x - h_0)^2 + n\,.\,A_{sc}\,.\,(x - d') - n\,.\,A_{st}\,.\,(d - x) = 0$$

15 x² + 1162,7 . x – 45575,5 = 0

x = 28,63 cm > h_0 = 10 cm..

Le moment d'inertie s'écrira :

$$I = \frac{b.x^3}{3} - \left(\frac{b - b_0}{3}\right).(x - h_0)^3 + A_{sc}\,.\,(x - d')^2 + A_{st}\,.\,(d - x)^2$$

I = 0,014 m^4

Alors les contraintes sont : $\sigma_{bc} = \frac{M_S.x}{I} = \frac{0,5.\ 0,2863}{0,014} = 10,23\,\text{MPa} < \overline{\sigma_{bc}}$ =0,6 . 20 = 12 MPa

et $\sigma_{st} = \frac{n.M_S.(d - x)}{I} = \frac{15.\,0,5\,.(0,65 - 0,2863)}{0,014} = 195\,\text{MPa}$

- la fissuration préjudiciable : $\sigma_{st} = 183\ MPa \le \min\left(\frac{2}{3}.fe\ ;\ 110\sqrt{\eta.f_{t28}}\right)$ = 201 MPa

Les vérifications sont : $\left.\begin{array}{l}\sigma_{bc} \prec \overline{\sigma_{bc}} \\ \sigma_{st} \prec \overline{\sigma_{st}}\end{array}\right\} E.L.S$ est vérifié

Chapitre IX

L'effort Tranchant

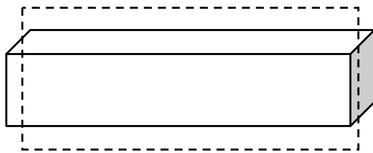
Chapitre IX : L'effort tranchant

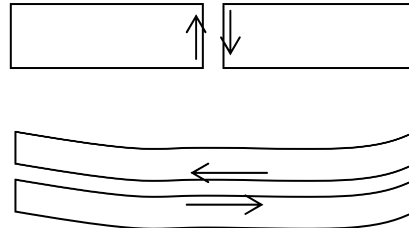
II- Généralités :

Dans une poutre en béton armé l'effort tranchant est équilibré par les armatures transversales.

III- Contrainte tangentielle conventionnelle :

L'effort tranchant fait glisser les plans les uns par rapport aux autre, les plans perpendiculaires et les plans parallèles.





La contrainte tangente (contrainte de cisaillement) dans la section ou se produit l'effort tranchant sera donnée par l'équation suivante : $\tau = \frac{T.S}{b.I}$

Avec : T : l'effort tranchant.

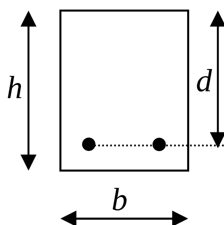
S : Moment statique de la section.

b : la largeur de la section.

I : le moment d'inertie de la section.

Le règlement C.B.A admet par simplification le principe de la tangente conventionnelle ultime:

$$\tau_u = \frac{T_u}{b.d}$$



τ_u : la contrainte de cisaillement.

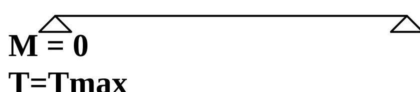
T_u : l'effort tranchant.

b : la largeur de la section.

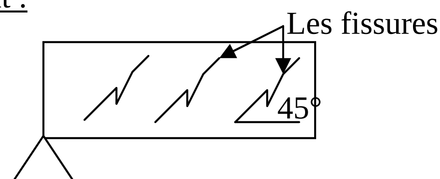
d : la distance entre la fibre supérieure et les armatures inférieures.

III- Comportement des poutres sous l'action de l'effort tranchant :

1- Etat de contrainte provoqué par l'effort tranchant :



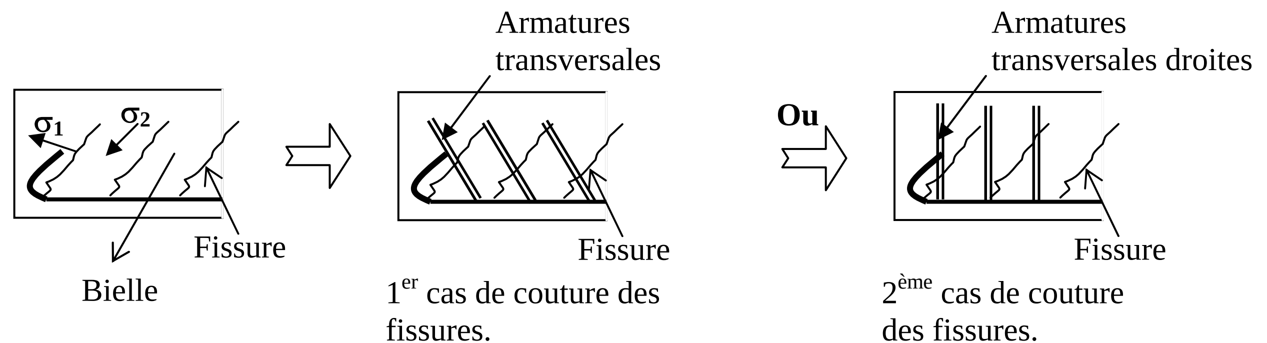
M = 0
T=Tmax



Les contraintes normales dans le béton aux appuis (isostatique) sont nulles. Donc nous avons un cisaillement pur.

2- Nécessité d'armatures transversales :

Le béton par sa faible résistance à la traction ne peut équilibrer les contraintes de traction engendrées par l'effort tranchant. Il est donc nécessaire de renforcer cette insuffisance par des armatures qui vont coudre ces fissures leurs disposition logique sera :



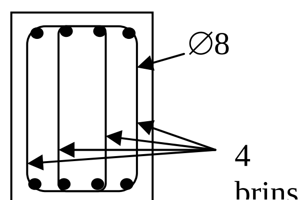
Parce que leur efficacité reste la même et pour faciliter l'exécution; les armatures seront disposées de la manière suivant le 2ème cas. On notera le ferraillage comme suit :

A_t : La quantité d'acier d'armature.

A_t = n . ∅ avec : n : le nombre de brin.

∅ = le diamètre du brin en général ∅**6** ou ∅**8**.

Exemple :



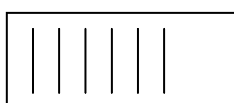
Nous avons : **A_t = 4 ∅8**

3 – Justification des poutres sous sollicitations tangentes :

a- Justification du béton :

La contrainte tangentielle τ_u doit satisfaire les conditions suivantes

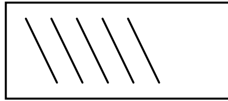
- Cas d'armatures droites :



$$\tau_u \le \min\left(\frac{0,2.f_{c28}}{\gamma_b};\ 5\,MPa\right)$$ pour une fissuration peu préjudiciable.

$\tau_u \leq \min\left(\frac{0{,}15.f_{c28}}{\gamma_b} ;\ 4\ MPa\right)$ pour une fissuration très préjudiciable ou préjudiciable.

- Cas d'armatures inclinées :

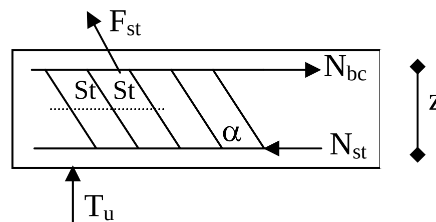


$$\tau_u \leq \min\left(\frac{0{,}27.f_{c28}}{\gamma_b} ;\ 7\ MPa\right)$$

Si $\tau_u > \tau_{ulimite} \Rightarrow$ on doit augmenter les dimensions de la section.

3 – Justification des poutres sous sollicitations tangentes :

$$n = \frac{z.(1+\cot g\ \alpha)}{St}$$



Projection verticale : $T_u = F_{st} . \sin \alpha$

En remplaçant toutes ces forces et en faisant la transformation nécessaire et en utilisant des approximations, on obtient :

$$\frac{A_t}{b\,.\,\mathrm{St}} \geq \frac{\tau_u - 0{,}3.k.f_{tj}^{'}}{0{,}9.\frac{fe}{\gamma_s}.(\sin\alpha + \cos\alpha)} \Leftrightarrow \frac{A_t}{b\,.\,\mathrm{St}} \geq \frac{\tau_u - 0{,}3.k.f_{tj}^{'}}{0{,}8.fe.(\sin\alpha + \cos\alpha)}$$

- Si on utilise des cadres droits $\Rightarrow$ sin α + cos α = 1.

- $f_{tj}^{'} = \min\ (f_{tj}\ ;\ 3{,}3\ \mathrm{MPa})$

- k = 1 : dans le cas général.

  k = 0 : si la fissuration est très préjudiciable ou s'il y'a reprise de bétonnage.

- Conditions complémentaires :

St ≥ 7 cm avec $S_{tmin} = 7$ cm.

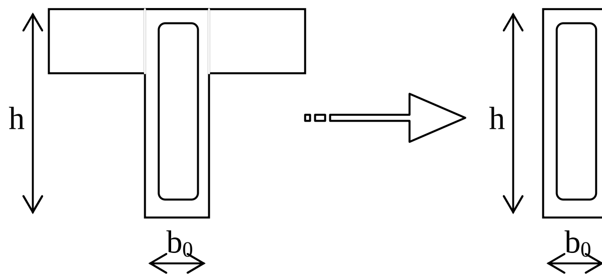
St ≤ min (0,9.d ; 40 cm)

$$\frac{A_t\,.\,fe}{b\,.\,\mathrm{St}} \geq 0{,}4\ \ \mathrm{MPa}$$

$$\varnothing_t \leq \min\left(\frac{h}{35} ; \frac{\mathrm{b}}{10} ; \phi_l\right)$$

$\varnothing_t \leq$ 12 mm

- Effort tranchant pour une section en Té :

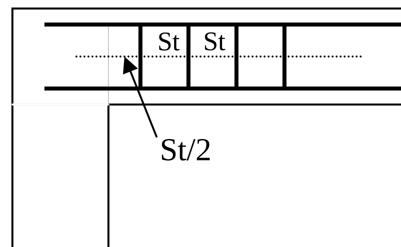


On considère que seul l'âme résiste à l'effort tranchant :

$$\tau = \frac{T}{b_0 \, . d}$$

6- Répartition des cadres le long de la poutre :

a – Position du 1er cadre :



b – Répartition des cadres :

- Méthode forfaitaire de Caquot :

Cette méthode est applicable qu'aux poutres de section constante et soumises à des charges uniformément réparties.

1°- On calcule St_0

2°- On prendra l'espacement immédiatement inférieur à St_0 dans la série de Caquot suivantes : **7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 13 ; 16 ; 20 ; 25 ; 25 ; 35. (cm)**

On choisis les espacements successivement qu'on respectera autant de fois en nombre entier compris dans la demi porté de la poutre ou la porté d'une console.

Exemple : St = 9,68 cm →de la série on prend St = 9 cm

3 × 9 ; 3 × 10 ; 3 × 11 ;… jusqu'à la demi porté.

- Epure de répartition : aucune condition n'est imposée.

$$\frac{A_t}{b \, . \mathrm{St}} \geq \frac{\tau_u - 0{,}3.k.f_{tj}}{0{,}8.fe}$$

$$\frac{A_t}{b \, . \mathrm{St}} \geq \frac{\tau_u}{0{,}8.fe} - \frac{0{,}3.k.f_{tj}}{0{,}8.fe}$$

$$\tau_u \leq \frac{A_t.0{,}8.fe}{b.St} + 0{,}3.k.f_{tj}$$ ……..multiplions les deux cotés par (**b** × **d**) .

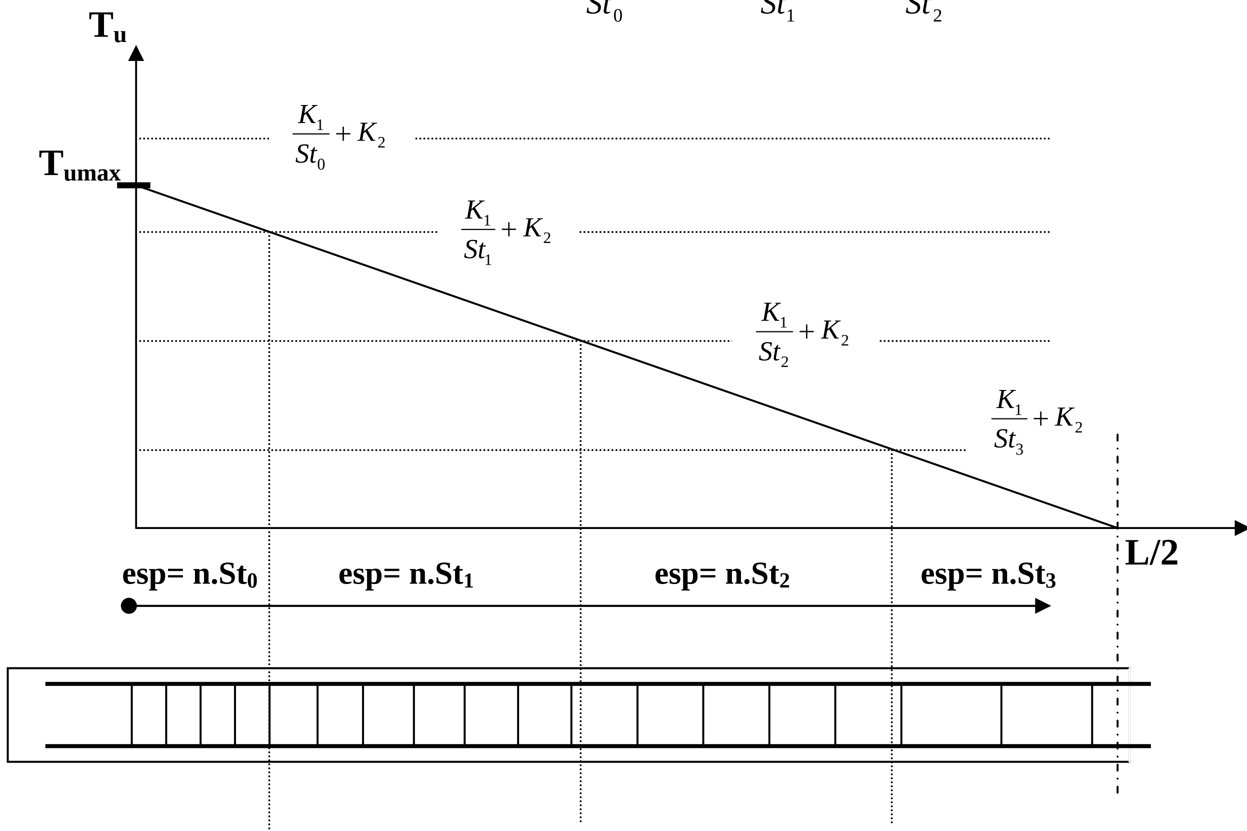
$$T_u \leq \frac{A_t.0{,}8.fe\,.d}{St} + 0{,}3.k.f_{tj}.b.d$$

Posons : $A_t \,.\, 0{,}8 \,.\, fe \,.d = K_1$ *et* $0{,}3 \,.\, f_{tj} \,.\, k \,.b \,.\, d = K_2$

D'où : $T_u \leq \dfrac{K_1}{St} + K_2$

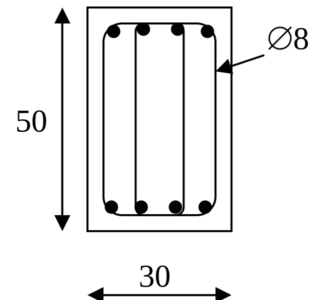
La méthode sera la suivante :

- On calcule St_0.
- On choisit les espacements St_1 ; St_2 ; St_3 …. Tel que $St_1 \leq St_2 \leq St_3$ …
- On calcule les quantités $\dfrac{K_1}{St_0} + K_2$; $\dfrac{K_1}{St_1} + K_2$; $\dfrac{K_1}{St_2} + K_2$;……



-Application :

Soit une poutre rectangulaire d'une portée L = 6 m soumise à un effort tranchant T_u = 200 KN. Si les cadres transversaux sont droits et de nuance FeE240. Sachant que f_{c28} = 25 MPa ; la fissuration est préjudiciable et il n'y a pas de reprise de bétonnage.



Solution :

1- La vérification de la contrainte de cisaillement dans le béton :

$$\tau_u = \frac{T_u}{b.d} = \frac{0{,}2}{0{,}3 \times 0{,}45} = 1{,}48 \text{ MPa}$$

La fissuration est préjudiciable:

$$\overline{\tau_u} \leq \min\left(\frac{0{,}15.f_{c28}}{\gamma_b};\ 4\,MPa\right) \Leftrightarrow \overline{\tau_u} \leq \min\left(\frac{0{,}15\times 25}{1{,}5};\ 4\,MPa\right) = 2{,}5 \text{ MPA}$$

Donc : $\tau_u < \overline{\tau_u}$

2- calcul de l'espacement entre cadres :

$$\frac{A_t}{b.\mathrm{St}} \geq \frac{\tau_u - 0{,}3.k.f_{tj}^{'}}{0{,}8.fe.(\sin\alpha + \cos\alpha)}$$

-cadres droits : sin α + cos α = 1.

- $f_{tj}^{'}$ = min (f_{tj} ; 3,3 MPa) = 2,1 MPa

- k = 1 : dans le cas général.

- A_t = 4∅8 = 2,01 cm².

- fe = 235 MPa

$$\Rightarrow \quad \mathrm{St} \leq \frac{A_t.0{,}8.fe}{b.(\tau_u - 0{,}3.k.f_{tj}^{'})} \Leftrightarrow \mathrm{St} \leq \frac{A_t.0{,}8.fe}{b.(\tau_u - 0{,}3.k.f_{tj})}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{St} \leq \frac{2{,}01\times 10^{-4} \times 0{,}8 \times 235}{0{,}3(1{,}48 - 0{,}3\times 1\times 2{,}1)} \Rightarrow \mathrm{St} \leq 14{,}8 \text{ cm.}$$

- Conditions complémentaires :

$St \geq 7$ cm avec $S_{tmin} = 7$ cm.

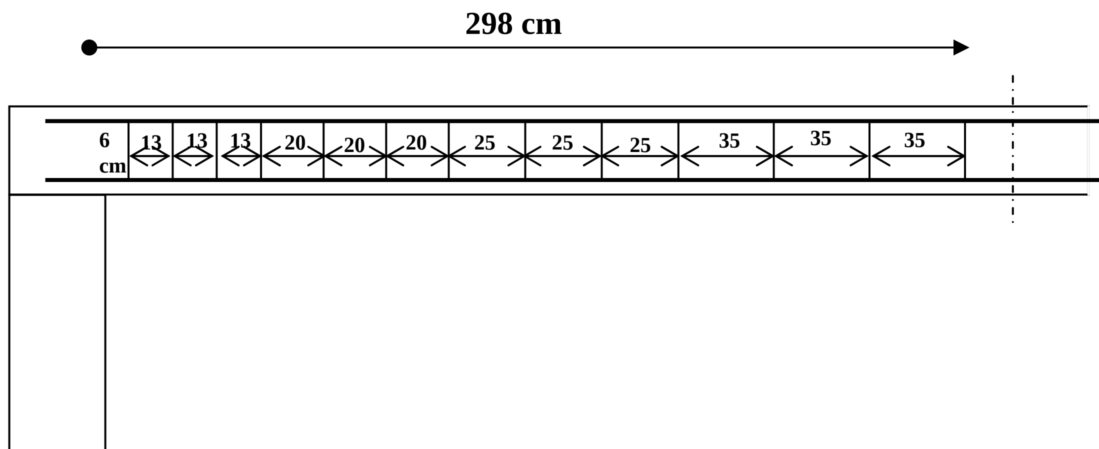
$St \leq \min(0{,}9.d\ ;\ 40\text{ cm}) \leq \min(40{,}5\text{ cm}\ ;\ 40\text{ cm})$

$$\frac{A_t \cdot fe}{b \cdot St} \geq 0{,}4\ \text{MPa} \Rightarrow \frac{2{,}01 \times 10^{-4} \times 235}{0{,}30 \times 0{,}148} = 1{,}06\ MPa \geq 0{,}4\ \text{MPa}$$

$\varnothing_t \leq \min\left(\frac{h}{35}; \frac{b}{10}; \phi_l\right)$ choix effectué à la flexion.

$\varnothing_t \leq 12$ mm

De la série de Caquot → St = 13 cm. n = L/2 = 6,00/2 = 3



Chapitre X

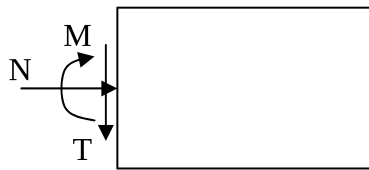
La flexion composée

Chapitre X : La flexion composée

I – Définition :

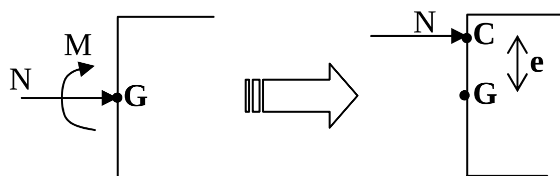
Une poutre est sollicitée en flexion composée si la réduction au centre de gravité (CDG) d'une section S des forces situées à gauche de cette section se décomposes.

- Couple de moment M d'axe ⊥ à la fibre moyenne.
- Effort normal N ⊥ à la section.
- Effort tranchant T dans le plan de la section.



II – Généralités : Le système formé par le moment fléchissant (M) et l'effort normal (N) peut être remplacé par une force unique équivalente à (N) et appliquée au point (C) appelé point d'application ou centre de pression.

Donc on remplace (M,N) → N au centre de pression tel que la distance GC = e.

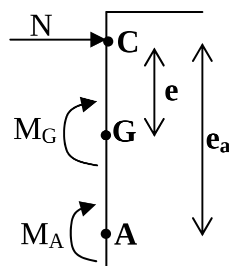


G : centre de gravité de la section.

C : point d'application (N)

e : excentricité. $GC = e = \frac{M}{N}$

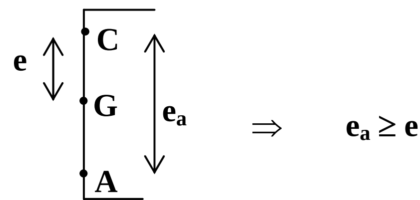
- En flexion composée, il faut toujours préciser en quel point on effectue la réduction des forces car la valeur des moments est dépendante de ce point. Ce point sera normalement, soit au CDG du béton (sans armatures) = (G); soit au centre de gravité des armatures tendues (A).



$$e = \frac{M_G}{N} \quad ; \quad e_a = \frac{M_A}{N}$$

- En flexion composée, la première chose à faire est de chercher la position du centre de pression (C)

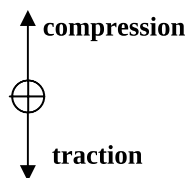
- Si (N) est un effort de compression (C) sera posé au dessus de (G).

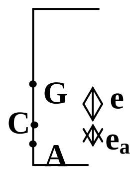


- Le point (C) peut se situer en dehors de la section donc "e" peut être supérieure à $\frac{h}{2}$:

$e > \frac{h}{2}$

- Si (N) est un effort de traction (C) sera posé au dessous de (G). (au coté de (A))



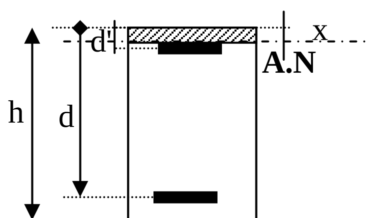


$CA = e_a$

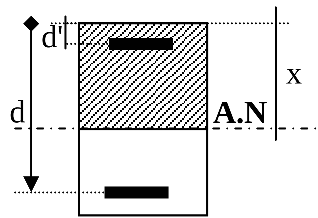
$GC = e$

C : peut être en dehors de la section.

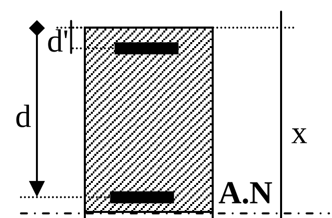
- Les équations d'équilibre en flexion composée s'établissent de la même manière que la flexion simple avec 3 différences :
  - $N \neq 0$.
  - La section peut être totalement comprimée.
  - Les sollicitations doivent être calculées à l'origine, que nous prendrons le point (A).
- En flexion composée, la section peut être partiellement comprimée sous un effort de traction ou compression: Nous avons 3 cas de position de l'axe neutre :



$x \leq d'$

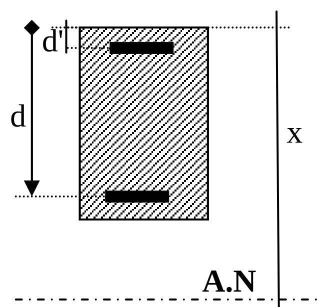


$d' < x < d$



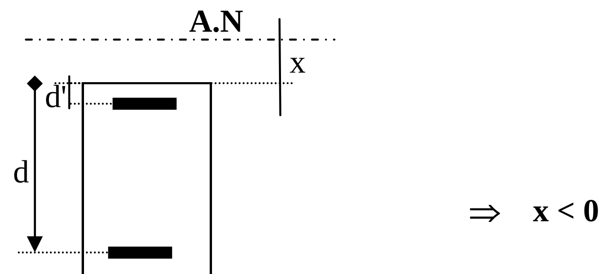
$x \geq d$

- La section peut être entièrement comprimée sous un effort de compression :



⇒ **$x > h$**

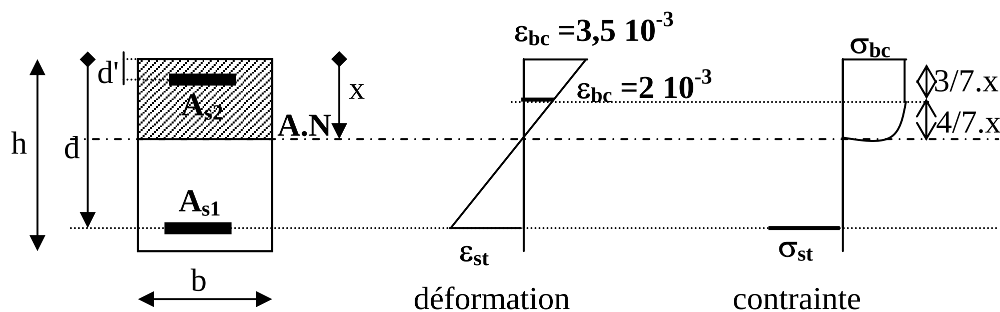
- La section peut être entièrement tendue sous un effort de traction :



III- Etat limite ultime de résistance pour une section rectangulaire :

1- Courbe de référence d'une section :

a- Section partiellement comprimée : (Domaine 2 – pivot B)



$$N_b = b.\int_{d-x}^{d} \sigma(z).dz = 0,81.b.\,x.\sigma_{bc}$$

$$M_b = b.\int_{d-x}^{d} z.\sigma(z).\,dz = 0,81.b.\,x.\sigma_{bc}.(d - 0,416.x)$$

$$= 0,81.b.\,\alpha.d^2.\sigma_{bc}.(d - 0,416.\alpha)$$

Alors le moment réduit μ_u sera : $\mu_u = \dfrac{M_b}{b.d^2.\sigma_{bc}} = 0,81.\ \alpha.(d - 0,416.\alpha)$

L'effort normal réduit : $\nu_u = \dfrac{N_b}{b.d.\sigma_{bc}} = 0,81.\ \alpha$

La relation entre μ_u et ν_u : $\mu_u = \nu_u.\left(1 - \dfrac{0,416\nu_u}{0,81}\right)$ ⇔ $\mu_u = \nu_u.(1 - 0,514.\nu_u)$

b - Section tendue ou partiellement comprimée : (Domaine 1 – pivot A)

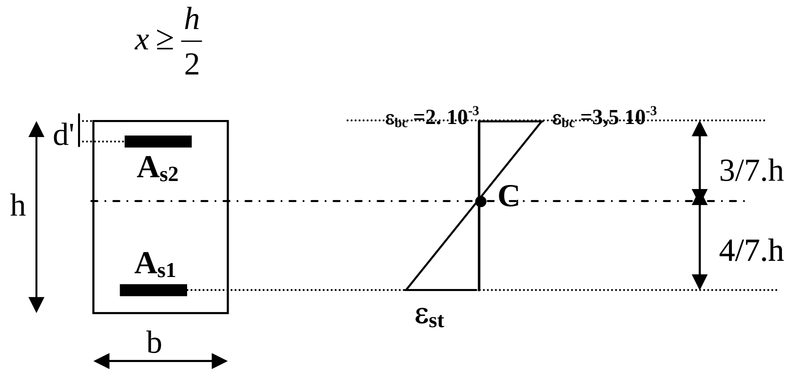
$0 \le \alpha \le 0,259$

x = 0 → z = d.

x = d → z = 0,89. d.

c - Section entièrement comprimée : (Domaine 3 – pivot 3)

$$x \geq \frac{h}{2}$$



$$\mu = \frac{d}{h} - 0,5 + \psi\left(\frac{6}{7} - \frac{d}{h}\right)$$

$$\nu = 1 - \psi$$

$$\psi = \frac{3,05}{\left(\frac{7x}{h} - 3\right)^2}$$

$x = h \rightarrow \psi = 0,19$

$x = \infty \rightarrow \psi = 0$

$$\mu = \frac{5}{14} - \nu\left(\frac{6}{7} - \frac{d}{h}\right)$$

d - Le tracé de la courbe de référence :

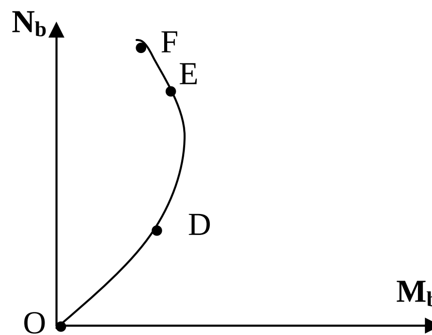
On constate de la plus part des cas que N_b est une fonction croissante de x et M_b est une fonction croissante de x et de Nb lorsque la section est partiellement commprimée et elle est décroissante lorsque la section est entièrement comprimée.

x = 0 → point O → $N_b = 0$ et $M_b = 0$.

x = d → point D → $N_b = 0,81.b.d.\sigma_{bc}$ et $M_b = 0,473.b.d^2.\sigma_{bc}$

x = h → point E → $N_b = 0,81.b.h.\sigma_{bc}$ et $M_b = 0,81.b.h.\sigma_{bc}.d\left(1 - 0,416\frac{h}{d}\right)$

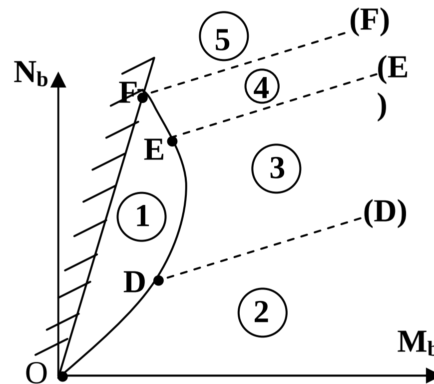
x = ∞ → point F → $N_b = b.h.\sigma_{bc}$ et $M_b = \left(d - \frac{h}{2}\right).b.h.\sigma_{bc}$



2- Domaines de fonctionnement de la section :

a- Détermination des domaines : sur la courbe de référence et à partir des points "D" et "E" et "F", on trace les droites D, E, F de pente $\frac{1}{d-d'}$. L'équation générale de ces droites sera :

$$\mathbf{M_u = M_b + (N_u - N_b).(d - d')}$$



La courbe de référence et les 3 droites D , E , F ont délimitées 5 zones. Alors les droites D, E, F auront pour équations :

Droite D :

$$M_u = M_b + (N_u - N_b).(d - d')$$

$$M_u = 0{,}473.b.d^2.\sigma_{bc} + N_u.(d - d') - 0{,}81.b.d.\sigma_{bc}.(d - d')$$

$$M_u = b.d^2.\sigma_{bc}.\left(-0{,}337 + 0{,}81.\frac{d'}{d}\right) + N_u.(d - d')$$

$$N_u.(d - d') - M_u = \left(0{,}337 - 0{,}81.\frac{d'}{d}\right).b.d^2.\sigma_{bc}$$

Droite E :

$$M_u = M_b + (N_u - N_b).(d - d')$$

$$M_u = b.h^2.\sigma_{bc}.\left(-0{,}337 + 0{,}81.\frac{d'}{h}\right) + N_u.(d - d')$$

$$N_u.(d - d') - M_u = \left(0{,}337 - 0{,}81.\frac{d'}{h}\right).b.h^2.\sigma_{bc}$$

Droite F :

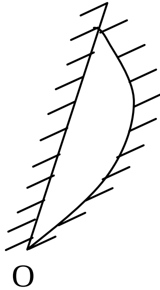
$$M_u = M_b + (N_u - N_b).(d - d')$$

$$M_u = b.h^2.\sigma_{bc}.\left(-0{,}5 + \frac{d'}{h}\right) + N_u.(d - d')$$

$$N_u.(d - d') - M_u = \left(0{,}5 - \frac{d'}{h}\right).b.h^2.\sigma_{bc}$$

b- Domaine de fonctionnement :

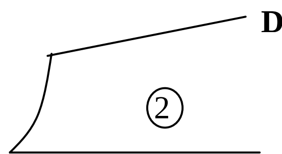
Zone (1) : Si on trouve dans cette zone, la section sera dite surabondante. Le point de coordonné (m , n) sera situé dans la zone (1) si les conditions suivantes sont vérifiées :

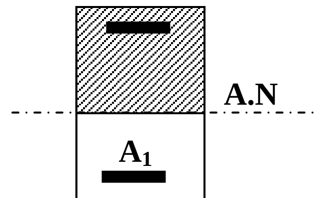


$$N_u \leq 0{,}81.b.h.\sigma_{bc} \quad \text{et} \quad M_A \langle N_u.d.\left(1 - 0{,}514\frac{N_u}{b.d.\sigma_{bc}}\right)$$

$$\text{Ou} \quad N_u > 0{,}81.b.h.\sigma_{bc} \quad \text{et} \quad M_A \langle b.h^2.\sigma_{bc}.\left[\frac{5}{14} - \frac{N_u}{b.h.\sigma_{bc}}\left(\frac{6}{7} - \frac{d}{h}\right)\right]$$

Zone (2) : Cette zone correspond à une section partiellement comprimée avec armatures inférieures tendues.



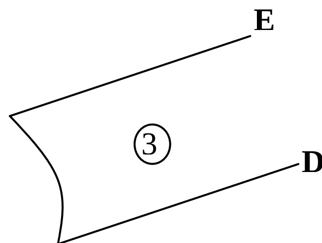


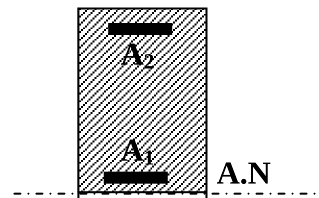
La condition qui nous indique que nous somme dans la zone (2):

$$N_u.(d - d') - M_A \leq \left(0{,}337 - 0{,}81.\frac{d'}{d}\right).b.d^2.\sigma_{bc}$$

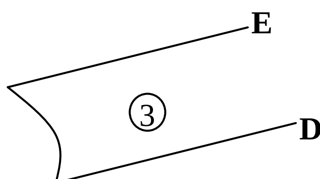
Zone (3) : Correspond à une section partiellement comprimée avec armatures inférieures comprimées.

$$\left(0{,}337 - 0{,}81.\frac{d'}{d}\right).b.d^2.\sigma_{bc} < N_u.(d - d') - M_A \leq \left(0{,}337 - 0{,}81.\frac{d'}{h}\right).b.h^2.\sigma_{bc}$$





Zone (4) et Zone (5) : Correspond à une section entièrement comprimée. .

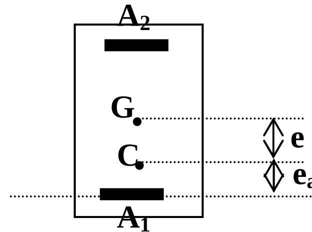


$$N_u.(d - d') - M_A > \left(0{,}337 - 0{,}81.\frac{d'}{h}\right).b.h^2.\sigma_{bc}$$

IV- Détermination des armatures :

1- Section entièrement tendue :

Une section sera dite entièrement tendue, si l'effort appliqué est un effort de tarction et s'il est appliqué entre les armatures :



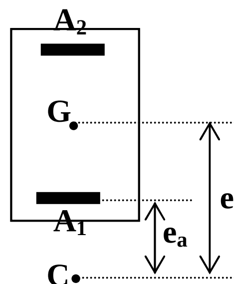
Les sections d'armatures seront données par :

$$A_1 = \frac{N_u}{\sigma_{st}}.\left(1 - \frac{e_a}{d - d'}\right) \qquad \text{et} \qquad A_2 = \frac{N_u.e_a}{\sigma_{st}.(d - d')}$$

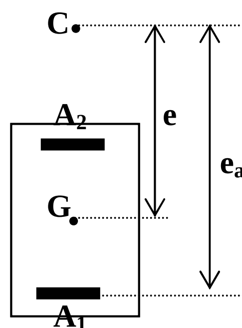
2- Section partiellement comprimée :

Une section sera partiellement comprimée si elle vérifie les conditions de la zone (2) et (3) en plus, une section sera partiellement comprimée dans les trois cas suivant :

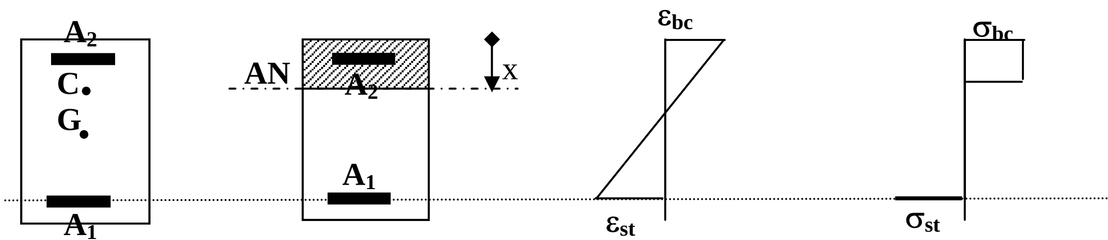
1er cas : si l'effort appliqué est un effort de traction et son point d'application est situé à l'extérieur de la section.



2ème cas : si l'effort appliqué est un effort de compression et son point d'application se situ à l'extérieur de la section.



3ème cas : si l'effort appliqué est un effort de compression et son point d'application se situ entre les armatures et s'il est proche des armatures supérieures.



$$\mu_u = \frac{M_A}{b.d^2.\sigma_{bc}}$$ On compare μ_u avec μ_l :

Si : $\mu_u \leq \mu_l$

$A_2 = 0$; $$A_1 = \frac{1}{\sigma_{st}}\left(\frac{M_A}{z} \pm N\right)$$

on utilise : (+) si l'effort est un effort de traction.

(-) si l'effort est un effort de compression.

Si : $A_1 < 0 \Rightarrow$ La section non ferraillée résiste aux efforts appliqués.

Si : $A_1 = 0 \Rightarrow$ La section ne nécessite pas de ferraillage.

Si : $\mu_u > \mu_l$

Le résistant s'écrit : $\mathbf{M_R = \mu_l . b . d^2 . \sigma_{bc}}$

Avec : $\mu_l = 0{,}8\,.\,\alpha_l\,.(1 - 0{,}4\,\alpha_l)$

$$A_2 = \frac{M_A - M_R}{\sigma_{sc}.(d - d')}$$

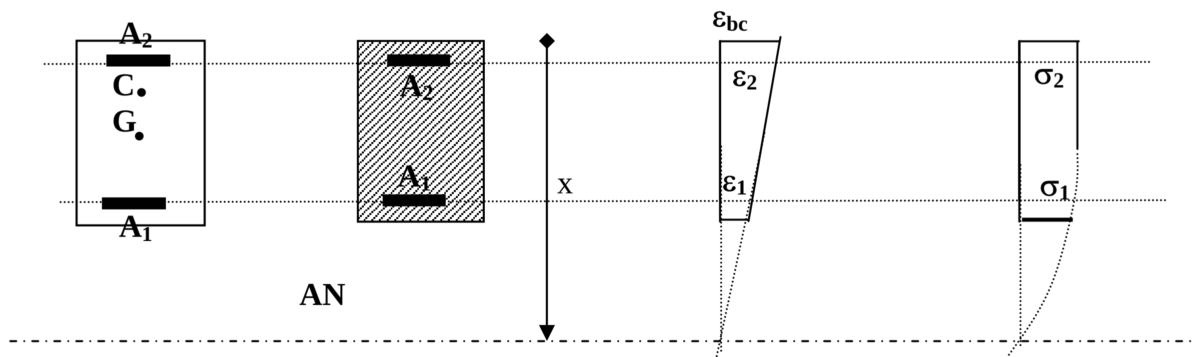
$$A_1 = \frac{1}{\sigma_{st}}\left(\frac{M_A - M_R}{(d - d')} + \frac{M_R}{d(1 - 0{,}4.\alpha_l)} \pm N\right)$$

Si : $A_1 < 0 \Rightarrow$ $A_1 = A_{min} = 0{,}23.b.d.\frac{f_{t28}}{fe}$

$$A_2 = \frac{N - b.\sigma_{bc}.\left[d' + \sqrt{(d')^2 + \frac{2.(d-d')N_u - M_A}{b.\sigma_{bc}}}\right]}{\sigma_{sc}}$$

3- Section entièrement comprimée :

Une section sera entièrement comprimée si l'effort est un effort de compression et son point d'application est entre les armatures et près du centre de gravité. Il faut vérifier les conditions des zones 4 et 5.



La vérification est faite avec les inégalités suivantes :

$$N_u .(d - d') - M_A \leq (0,5.h - d') . b . h . \sigma_{bc}.$$

Si $N_u .(d - d') - M_A \leq (0,5.h - d') . b . h . \sigma_{bc}$:

On est dans la zone 4.

$$\psi = \frac{0,5 - \frac{d'}{h} - \frac{(d-d').N_u - M_A}{b.h^2.\sigma_{bc}}}{\frac{6}{7} - \frac{d'}{h}}$$

$A_1 = 0$

$$A_2 = \frac{N_u - (1-\psi).b.h.\sigma_{bc}}{\sigma_{sc}}$$

$$\varepsilon_c = 2.10^{-3}\left[1 - \left(3 - 7\frac{d'}{h}\right)\sqrt{\frac{\psi}{1,75}}\right]$$

Si $N_u .(d - d') - M_A > (0,5.h - d') . b . h . \sigma_{bc}$:

On est dans la zone 5.

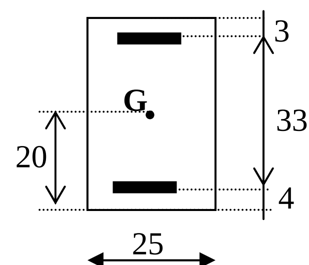
$$\varepsilon_c = 2.10^{-3} \qquad \sigma = f(2.10^{-3})$$

$$A_2 = \frac{M_A - b.h.\sigma_{bc}.(d - \frac{h}{2})}{(d-d').\sigma_{sc}}$$

$$A_1 = \frac{N_u - b.h.\sigma_{bc}}{\sigma_{sc}} - A_2$$

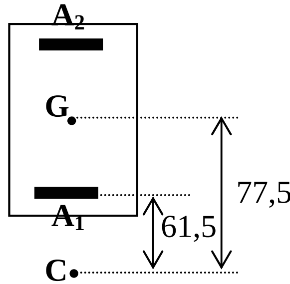
-Application : Soit une section rectangulaire soumise à l'E.L.U à un moment de flexion M_u = 0,155 MN et un effort de traction N_u = 0,2 MN. Si f_{c28} = 25 MPa et FeE400.

- Calculez les sections d'armatures ?



- Solution :

- L'excentricité : $e = \frac{M}{N} = \frac{0,155}{0,2}$ = 77,5 cm > $\frac{h}{2} = \frac{40}{2}$ = 20 cm.



Nous avons une section partiellement comprimée.

$e_a = e - (d - \frac{h}{2}) = 77,5 - (36 - \frac{40}{2}) = 61,5$ cm.

$M_A = N_u . e_a = 0,2 . 0,615 = 0,123$ MN.m

$0,81 . b . h . \sigma_{bc} = 0,81 . 0,25 . 0,40 . 14,17 = 1,147$ MN

$$\begin{cases} N = 0,2 \text{ MN} < 0,81 . b . h . \sigma_{bc} = 1,147 \text{ MN} \\ M_A = 0,123 \text{ MN.m} > N.d.\left(1 - 0,514.\frac{N}{b.d.\sigma_{bc}}\right) = 0,0662 \text{ MN.m} \end{cases} \Longrightarrow$$ La section n'est pas surabondante

$N.(d - d') - M_A = 0,2 . (0,36 - 0,03) - 0,123 = -0,057$ MN.m

$N.(d - d') - M_A = -0,057 \text{ MN.m} \leq \left(0,337 - 0,81.\frac{d'}{d}\right).b.d^2.\sigma_{bc} = 0,124$ MN.m

On est dans la zone (2) ⇒ S.P.C avec armatures inférieures tendues.

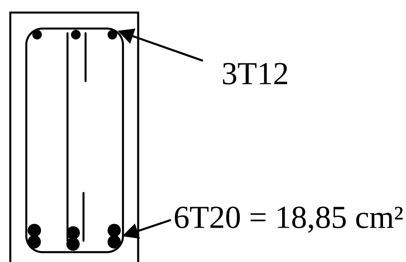
$$\mu_u = \frac{M_A}{b.d^2.\sigma_{bc}} = \frac{0,123}{0,25.(0,36)^2.14,17} = 0,268$$

$\mu_u = 0,268 \leq \mu_l = 0,392$

$A_2 = 0$; $A_1 = \frac{1}{\sigma_{st}}\left(\frac{M_A}{z} + N\right)$

$\alpha = 0,399$; $z = 0,3$ m.

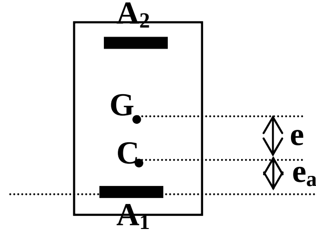
$$A_1 = \frac{1}{348}\left(\frac{0,123}{0,3} + 0,2\right) = 17,53 \text{ cm}^2$$ Soit 6HA20 = 18,85 cm².



V- Etat limite de service :

1 – Section entièrement tendue : Une section sera entièrement tendue, si l'effort est un effort de traction et si le centre de pression est appliqué entre les armatures.

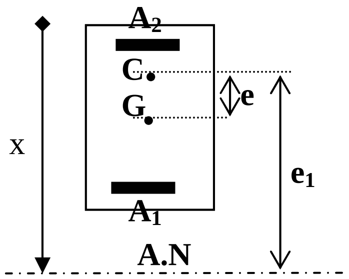
Sachant que A1 et A2 sont des sections de ferraillage choisies.



$$\sigma_{st1} = \frac{N_{ser}}{A_1}.\left[1 - \frac{e_a}{d - d'}\right]$$

$$\sigma_{st2} = \frac{N_{ser}.e_a}{A_2.d - d'}$$

2 – Section entièrement comprimée : Une section sera entièrement comprimée, si l'effort est un effort de compression et si le point C est à l'intérieur du noyau central de la section totale homogène. $e \leq \frac{h}{6}$; $e_1 = \frac{I}{S}$



I : Le moment d'inertie de la section totale.

S : Le moment statique de la section totale.

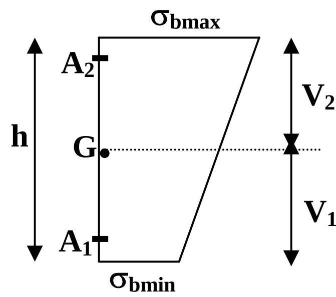
$$S_{AN} = b.h.(e_1 - e) - n.A_2.\left(e_1 - e + \frac{h}{2} - d'\right) + n.A_1.\left(e_1 - e + \frac{h}{2} - d\right)$$

$$I_{AN} = \frac{b.h^3}{12} + b.h.(e_1 - e)^2 - n.A_2.\left(e_1 - e + \frac{h}{2} - d'\right)^2 + n.A_1.\left(e_1 - e + \frac{h}{2} - d\right)^2$$

$$e_1 = \frac{-\left[\frac{b.h^3}{12} + b.h.e^2 + n.A_2.\left(-e + \frac{h}{2} - d'\right)^2 + n.A_1.\left(-e + \frac{h}{2} - d\right)^2\right]}{-b.h.e + n.A_2.\left(-e + \frac{h}{2} - d'\right) + n.A_1.\left(-e + \frac{h}{2} - d\right)}$$

Si $|e_1| < \frac{h}{2} + e$: L'axe neutre est dans la section ⇒ section partiellement comprimée.

Si $|e_1| \geq \frac{h}{2} + e$: L'axe neutre est en dehors de la section ⇒ section entièrement comprimée.



$B_0 = B + n.(A_1 + A_2)$

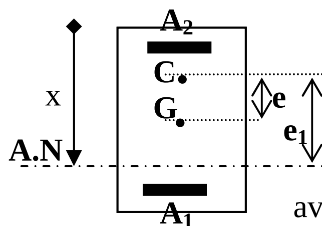
$$\sigma_{b\min} = \frac{N_s}{B_0} - \frac{M_S.V_1}{I_{AN}}$$

$$\sigma_{b\max} = \frac{N_s}{B_0} - \frac{M_S.V_2}{I_{AN}} \leq \overline{\sigma_{bc}}$$

$$V_1 = V_2 = \frac{h}{2}$$

<u>3 – Section partiellement comprimée :</u> Une section sera partiellement comprimée, si l'effort (soit compression ou traction) est en dehors du noyau central. $\Rightarrow\ e \geq \frac{h}{6}$.

- <u>N est un effort de compression :</u>



$$x = \frac{h}{2} + e_1 - e$$

$$e_1^3 + p.e_1 + q = 0$$

avec: $$P = -3.\left(e - \frac{h}{2}\right)^2 + \frac{6.n.A_2}{b}.\left(e - \frac{h}{2} + d'\right) + \frac{6.n.A_1}{b}.\left(e - \frac{h}{2} + d\right)$$

$$q = 2.\left(e - \frac{h}{2}\right)^3 - \frac{6.n.A_2}{b}.\left(e - \frac{h}{2} + d'\right)^2 - \frac{6.n.A_1}{b}.\left(e - \frac{h}{2} + d\right)^2$$

p et q peuvent être négatif: $e_1 = \sqrt[3]{-p.e_1 - q}$

$$e_1 = \frac{-e_1^3 - q}{p}$$

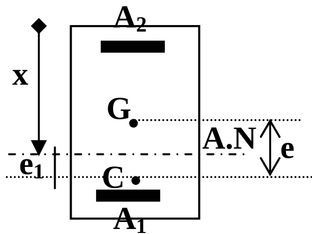
On tire le e_1 et avec on calcule *x*.

$$S = \frac{b.x^2}{2} + n.A_2.(x - d') - n.A_1.(d - x)$$

$$\sigma_{bc} = \frac{N_s.x}{S} \leq \overline{\sigma_{bc}}$$

$$\sigma_{st} = \frac{n.N_s.(d - x)}{S} \leq \overline{\sigma_{st}}$$

- N est un effort de traction :



$$x = \frac{h}{2} - e_1 + e$$

$$e_1^3 + p.e_1 + q = 0$$

avec : $$P = -3.\left(e+\frac{h}{2}\right)^2 + \frac{6.n.A_2}{b}.\left(e+\frac{h}{2}+d'\right) + \frac{6.n.A_1}{b}.\left(-e-\frac{h}{2}+d\right)$$

$$q = 2.\left(e+\frac{h}{2}\right)^3 - \frac{6.n.A_2}{b}.\left(e+\frac{h}{2}+d'\right)^2 - \frac{6.n.A_1}{b}.\left(-e-\frac{h}{2}+d\right)^2$$

$$S = \frac{b.x^2}{2} + n.A_2.(x-d') - n.A_1.(d-x)$$

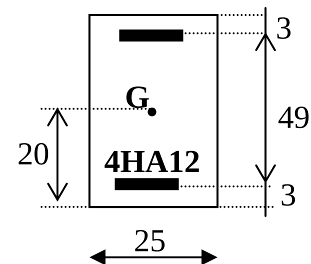
$$\sigma_{bc} = \frac{N_s.x}{S} \le \overline{\sigma_{bc}}$$

$$\sigma_{st} = \frac{n.N_s.(d-x)}{S} \le \overline{\sigma_{st}}$$

-Application : Soit une section rectangulaire soumise à l'E.L.S à un moment de flexion M_s = 0,08 MN et un effort de compression N_s = 0,15 MN. Si f_{c28} = 20 MPa et FeE400.

Si : $A_2 = 0$; A_1 = 4 HA 12 = 4,52 cm².

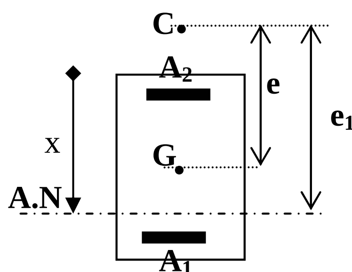
- Vérifiez les contraintes ?



- Solution :

- L'excentricité : $e = \frac{M}{N} = \frac{0,155}{0,2}$ = 0,553 m > $\frac{h}{6} = \frac{55}{2}$ = 0,092 m.

Nous avons une section partiellement comprimée.



$$e_1^3 + p.e_1 + q = 0 \qquad \text{avec:}$$

$$P = -3.\left(e-\frac{h}{2}\right)^2 + \frac{6.n.A_2}{b}.\left(e-\frac{h}{2}+d'\right) + \frac{6.n.A_1}{b}.\left(e-\frac{h}{2}+d\right)$$

P = -735

$$q = 2.\left(e-\frac{h}{2}\right)^3 - \frac{6.n.A_2}{b}.\left(e-\frac{h}{2}+d'\right)^2 - \frac{6.n.A_1}{b}.\left(e-\frac{h}{2}+d\right)^2$$

q = -64100

Soit : $e_1 = \sqrt[3]{-p.e_1 - q}$

$e_1 = 0 \rightarrow e_1 = 40$

$e_1 = 40 \rightarrow e_1 = 45,39$

$e_1 = 45,39 \rightarrow e_1 = 46,02$

$e_1 = 46,02 \rightarrow e_1 = 46,09$

$e_1 = 46,09 \rightarrow e_1 = 46,10$ cm.

Soit : e_1 = 46,10 cm.

$$x = \frac{h}{2} + e_1 - e = \frac{55}{2} + 46,10 - 53,3 = 20,30 \text{ cm}$$

x = 20,30 cm

$$S = \frac{b.x^2}{2} + n.A_2.(x - d') - n.A_1.(d - x) = 0,003 \text{ m}^3$$

$$\sigma_{bc} = \frac{N_s.x}{S} = \frac{0,15.\ 0,203}{0,003} = 10,2 \text{ MPa} < \overline{\sigma_{bc}} = 12 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{st} = \frac{n.N_s.(d - x)}{S} = \frac{15.\ 0,15.(0,52 - 0,203)}{0,003} = 238 \text{ MPa} > \overline{\sigma_{st}} = 201\,MPa$$

L'E.L.S n'est pas vérifié.

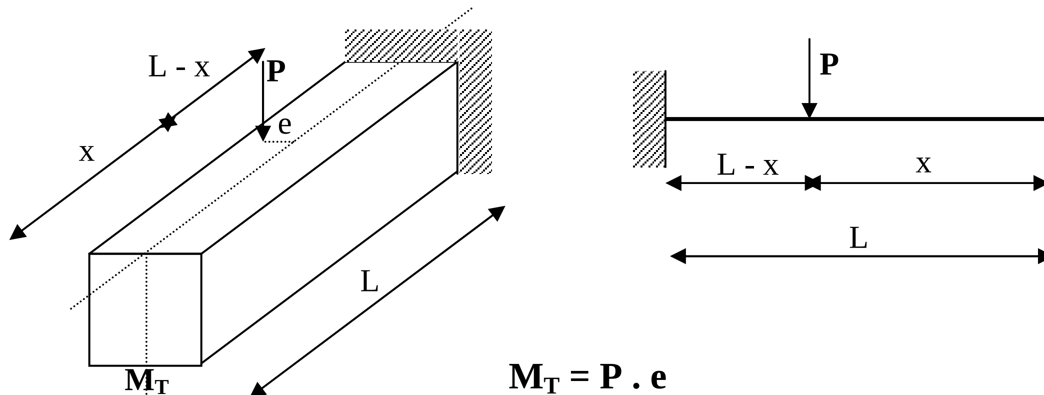
Chapitre XI

La Torsion

Chapitre XI : La torsion

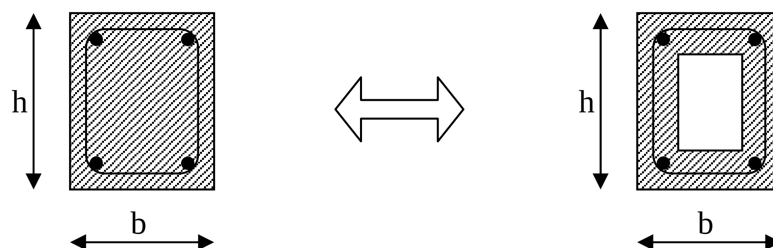
I – Définition -Généralités :

Une poutre sera soumise à la torsion lorsque les forces appliquées sont excentrées par rapport au plan de symétrie longitudinale.



$$M_T = P \cdot e$$

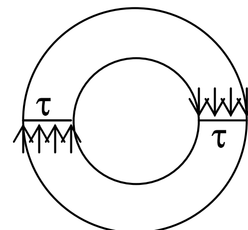
La torsion pure se rencontre que très rarement dans les pièces en béton armé plutôt c'est une flexion plus une torsion en même temps. Des essais effectués sur des poutres armées montrent qu'avec l'accroissement du moment de torsion, il y'a une redistribution des efforts internes vers le bords de la section. Seule une couche de béton peut épaisse contribue à la résistance. On constate que deux sections de même dimensions extérieures et de même ferraillage l'une pleine et l'autre creuse auront un même comportement.



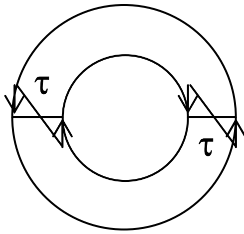
Le moment de torsion extérieure M_T sera équilibré par deux moments de torsions intérieures de natures différentes.

a- Torsion uniforme de S[t] Venant :

Elle résulte de la formation d'un flux de cisaillent formé à l'intérieure de la section.



b- Torsion non uniforme :



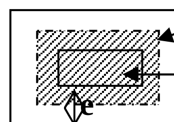
Elle résulte de la formation de contraintes tangentielles dues à la variation des contraintes normales. Cette deuxième torsion (la torsion non uniforme) est valable pour des parois minces à profil ouvert.

Les ouvrages en béton armé sont généralement massifs et à profil fermé donc ils sont justifiés à la torsion uniforme.

II – Contraintes tangentes de torsion :

1- Sections creuses (tubulaires) :

$$\tau_T = \frac{M_T}{2.\Omega.e}$$



La fibre moyenne (à mi-épaisseur)

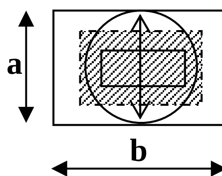
Ω : La surface délimitée par la fibre moyenne.

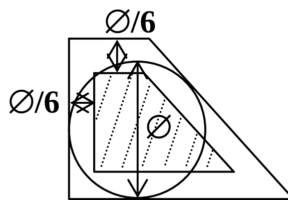
e : épaisseur de la paroi au point considéré.

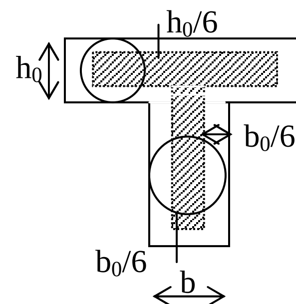
2- Sections pleines :

On remplace la section réelle par une section creuse équivalente dans l'épaisseur de la paroi sera égale au 1/6 du diamètre du plus grand cercle qu'il est possible d'inscrire dans le contour extérieur de la section.

$$\tau_T = \frac{M_T}{2.\Omega.e}$$







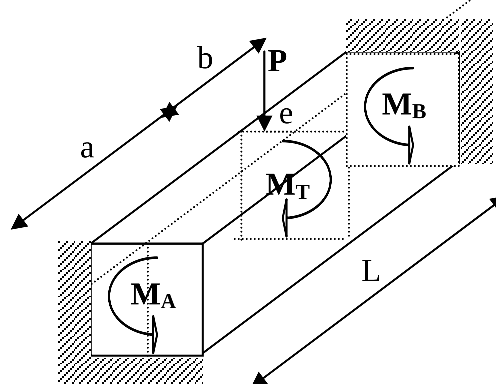
III- Comportement des poutres soumises à un moment de torsion :

Soit une poutre de longueur L.

$M_T = P \cdot e$

$M_A = \frac{b}{L} \cdot M_T$

$M_B = \frac{a}{L} \cdot M_T$



Les aciers longitudaux seront tendues. Le shéma de rupture comporte trois éléments suivants :

1. Il ya une compression dans les bielles du béton.
2. Il ya une traction dans les armatures longitudinales.
3. Il ya une traction dans les armatures transversales.

IV- Justification des poutres sous sollicitation de torsion :

1- Justification du béton :

Les contraintes tangentes seront limitées par les valeurs suivantes :

$$\tau_{UL} \leq \min\left(\frac{0{,}2.f_{c28}}{\gamma_b};\ 5\,MPa\right)$$ pour une fissuration peu préjudiciable.

$$\tau_{uL} \leq \min\left(\frac{0{,}15.f_{c28}}{\gamma_b};\ 4\,MPa\right)$$ pour une fissuration très préjudiciable ou préjudiciable.

$$\tau_{uL} \leq \min\left(\frac{0{,}27.f_{c28}}{\gamma_b};\ 7\,MPa\right)$$ Armatures inclinées à 45°.

Les contraintes tangentes de torsion et l'effort tranchant doivent être cumulées. Pour le béton les contraintes dues à l'effort tranchant et au torsion doivent être combinées et comparées au contraintes limite données précédemment.

-Sections creuses :

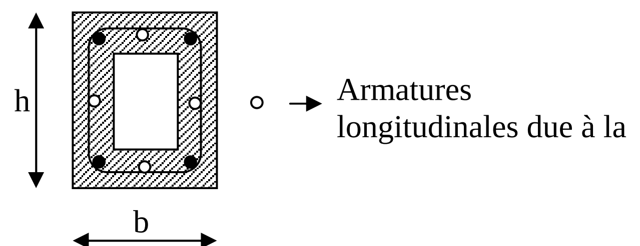
$$\tau_{\text{tranchant}} + \tau_{\text{torsion}} \leq \tau_{\text{limite}}$$

-Sections pleines :

$$(\tau_{\text{tranchant}})^2 + (\tau_{\text{torsion}})^2 \leq (\tau_{\text{limite}})^2$$

2- Justification des armatures :

On prévoit généralement des systèmes d'armatures longitudinales et transversales qui s'ajoutent aux ferraillages dû au moment fléchissant et à l'effort tranchant. Les armatures longitudinales seront prévues près des parois.



Les barres seront réparties et disposées au 4 coins et éventuellement sur les faces. Les deux systèmes d'armatures A_l et A_t seront donnés par les équations suivantes:

$$\frac{A_l\,.\,fe}{U.\gamma_s} = \frac{M_T}{2.\Omega} \quad \text{et} \quad \frac{A_t\,.\,fe}{St.\gamma_s} = \frac{M_T}{2.\Omega}$$

U : Le périmètre de la surface Ω délimitée par la fibre moyenne.

M_T : Le moment de torsion.

St : L'espacement entre les armatures transversales.

- Application :

Soit une section rectangulaire pleine **(20 × 40) cm²** ; sollicitée par un moment de torsion **M_T = 10 KN.m**.

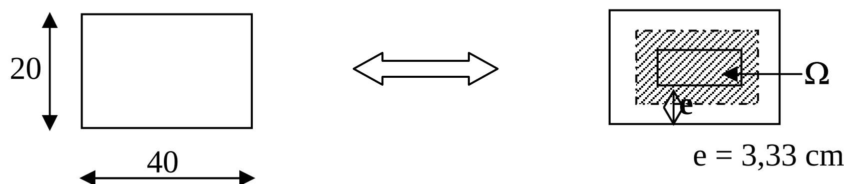
Si la fissuration est préjudiciable et les cadres sont droits.

Les caractéristiques des matériaux sont : **f_{c28} = 25 MPa et FeE235**

1°- Vérifiez la contrainte dans le béton ?

2°- Calculez les sections d'armatures nécessaires ?

Solution :



e = 3,33 cm

$e = \frac{a}{6}$ =3,33 cm.

Ω = (20 – 3,33) . (40 – 3,33) = 611,29 cm².

1° - Vérification de la contrainte de cisaillement :

$$\tau_T = \frac{M_T}{2.\Omega.e} = \frac{0{,}01}{2\times 0{,}061129 \times 0{,}0333} = 2{,}46\ MPa$$

$$\tau_{uL} \le \min\left(\frac{0{,}15.f_{c28}}{\gamma_b};\ 4\,MPa\right)$$ pour une fissuration très préjudiciable ou préjudiciable.

$$\tau_{uL} \le \min\left(\frac{0{,}15.25}{1{,}5};\ 4\,MPa\right) = \min\left(\frac{0{,}15.25}{1{,}5};\ 4\,MPa\right) = 2{,}5MPa$$

τ_T = 2,46 MPa 〈 τ_{uL} = 2,5 MPa ⇒ Condition vérifiée.

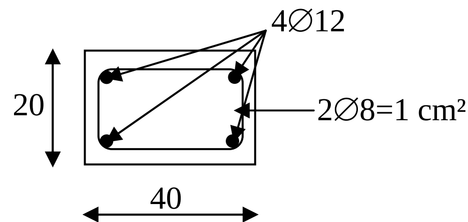
2°- Calcul des armatures :

-Armatures longitudinale : $\frac{A_l \cdot fe}{U.\gamma_s} = \frac{M_T}{2.\Omega} \Rightarrow A_l = \frac{M_T . U . \gamma_s}{2.\Omega . fe}$

$U = [(20 - 3,33) + (40 - 3,33)] \times 2 = 106,68$ cm.

$$A_l = \frac{M_T . U . \gamma_s}{2.\Omega . fe} \Rightarrow A_l = \frac{0,01 \times 1,0668 \times 1,15}{2 \times 0,061129 \times 235} = 4,27 \text{ cm}^2$$

$\Rightarrow$ 4∅12 = 4,52 cm².



$$\frac{A_t \cdot fe}{St.\gamma_s} = \frac{M_T}{2.\Omega} \Rightarrow St = \frac{A_t \cdot fe.2\Omega}{M_T .\gamma_s} = \frac{0,0001 \times 235 \times 2 \times 0,061129}{0,01 \times 1,15} = 25 \text{ cm}$$

Bibliographie

1- **"Cours de béton armé B.A.E.L.91: calcul des éléments simples et des structures en béton armé"**

JEAN Pierre mougin

Edition 1997 - Eyrolles

2- **"Règles de conception et de calcul des structures en béton armé C.B.A93".**

Document technique réglementaire D.T.R.-B.C.2-41.

3- **" B.A.E.L.91 : Règles techniques de conception et de calcul et constructions des ouvrage en béton armé suivant la méthode des état limites"**

Edition 1993 - Eyrolles

4- **"Règles parasismiques algériennes R.P.A99/version 2003".**

Document technique réglementaire D.T.R.-B.C.2-48.